الجمهورية العربية السورية

جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

رسالة أعدت لنيل درجة الماجستير في الرياضيات بعنوان:

استقرار جملة المعادلات التفاضلية العشوائية بطريقة ليابونوف

إعداد الطالب

رياض ريمون جبيلي

إشراف الأستاذ الدكتور

سامح العرجة

العام الدراسي

٢٠١٠-٢٠١١

الفهرس

الفصل الثاني : دراسة استقرار حلول جمل المعادلات التفاضلية العشوائية

مقدمة :

لقد تمت دراسة مسائل الاستقرار لأول مرة في علم الميكانيك وذلك من الحاجة لدراسـة التوازن لجملة ما وقد تبين أن حالات التوازن لبعض الجمل تكون مستقرة بوسـيط اضـطراب بسيط لذلك فإن بعض حالات التوازن يمكن دراستها نظرياً لكن من غير الممكن تمثيلها عملياً.

لو درسنا المثال البسيط: إذا كان النواس في الموضع الأدنى له فإن أي اضطراب بسيط سيؤدي إلى تذبذب حول الموضع الأدنى أما عند تثبيت النواس في أعلى موضع فإن أي دفعة ستسبب سقوطاً مفاجئاً وهكذا فإن مسألة الاستقرار في هذه الحالة تكون بسيطة أما بصورة عامة فإن استقرار الجملة تحت أي حالة توازن لا تكون واضحة.

إن دراسة الاستقرار تبدأ من التطور الملحوظ للتحليل الرياضي المتداخل مع المتحـولات العشوائية (التي أبسط أشكالها عندما تأخذ هذه المتحولات العشوائية قيماً في مجموعـة الأعـداد الحقيقية)، ويرجع الفضل إلى علماء رسموا لنا البداية الصحيحة للطريق أمثال العالم الفرنـسي بونكاريه الذي كان لديه الأساس العملي لحل جمل ميكانيكية وحلها يؤول في نهاية المطاف إلـى حل جملة معادلات تفاضلية.

كما قدم العالم توريسل E. Torricelle عام 1644 معياراً من أجل استقرار الأجسام الصلبة في حالة التوازن تحت تأثير قوى متعلقة بالجاذبية وأثبت العالم لاغرانج G. Lagrange في عام 1788 النظرية التي تعطي شروطاً كافية لاستقرار أي جملة مقاومة للتغيير.

وفي منتصف القرن التاسع عشر ظهرت مسائل عديدة في علم الميكانيك والتكنولوجيا تطلبت صياغة نظرية أكثر عمومية لاستقرار الحركة في حالة التوازن .

وقد أشار العالم ماكسويل J. K. Maxwell عام 1868 إلى ضرورة صياغة معيار توازن الحركة قبل حل هذه المسألة .

وفي نهاية القرن التاسع عشر تمت مناقشة مسألة استقرار الحركة بشكل عام حيث قام رايث E. J. Raith بنشر مقالين عن استقرار الحركة .

المقالة الأولى كانت بعنوان:

" A Treatise on the stability of a Give state of Motion"

والمقالة الثانية كانت بعنوان:

" The Advanced part of a Treatise on the Dynamics of a system of Rigid Bodies "

كما نشر زوكوفسكي N. E. Zhukvasky رسالة الدكتوراة عام 1882 فقدمت هذه الدراسات بعض المسائل الرئيسية في نظرية الاستقرار أدت إلى تطوير طرق متعددة لدراسة استقرار الحركة.

ثم جاء العالم الروسي ليابونوف (Alexander Mikhailovich Lyapunov) عام 1892 لينشر أطروحة الدكتوراة بعنوان: " المسألة العامة لاستقرار الحركة"

" The General proplem of Motion Stability "

التي تضمنت العديد من الأفكار المثمرة والنتائج الهامة وبالتالي أصبح من الممكن تقسيم تاريخ الاستقرار إلى فترتين: الأولى ما قبل ليابونوف والثانية ما بعد ليابونوف فقد قدم تعريفاً دقيقاً لاستقرار الحركة وإن غياب هذا التعريف يسبب سوء فهم في استقرار الحركة ذلك لأن الحركة تكون مستقرة في معنى ما وغير مستقرة في معنى آخر وهكذا فإن تعريف ليابونوف يكون مفهوماً أساسياً شاملاً.

إن صيغة ليابونوف الأولى لمسألة استقرار الحركة تكون قابلة للتطبيق حيث يمكن تحديد الاستقرار بواسطة معادلات خطية بدون تحليلها بشكل دقيق وتمكننا من الحصول على حل تام لهذه المسألة من أجل الحركات المستقرة حيث تكون معادلات الحركة مضطربة لا تعتمد على الزمن بشكل صريح .

ومن الطرق الأساسية التي اقترحها ليابونوف لتحليل مسائل استقرار الحركة الطريقة الثانية التي تدعى بطريقة ليابونوف الثانية أو طريقة ليابونوف المباشرة، وهي معروفة بشكل واسع لبساطتها وكفاءتها وقدم إثباتاً لعكس نظرية لاغرانج Lagrange من أجل حالات خاصة.

أما في فترة ما بعد ليابونوف فقد تطورت نظرية استقرار الحركة في مجالات عديدة وتم إيجاد بعض الطرائق الأخرى لتحليل الاستقرار وتحديد النتائج التي حصل عليها ليابونوف بدقة أكثر.

وقد تركزت جهود الباحثين من أجل تحديد شروط الاستقرار تحت تأثير اضطرابات كبيرة مع شروط ابتدائية واضطرابات تابعة للزمن إضافة إلى اضطرابات في فترات زمنية لا نهائية تحت تأثير قوى عشوائية.

<u>بالنتيجة</u> أصبحت نظرية الاستقرار في العصر الحديث تستخدم بشكل أوسع في علوم الفيزياء

والفلك والكيمياء وحتى في علم الأحياء ومن أهم استخداماتها في التكنولوجيا: السفن – الطائرات – الصواريخ – التوربينات – المولدات.

وحتى الآن لم تكتمل نظرية الاستقرار ولا تزال مسألة تطويرها مجال بحث حتى يومنا هذا .

تشتمل هذه الأطروحة مقدمة تاريخية تعرض مراحل تطور نظرية الاستقرار وتعرف بأبرز العلماء الذين بحثوا في هذا المجال وتشتمل على ثلاثة فصول أيضاً .

الفصل الأول :

ويتضمن بعض المفاهيم الأولية لنظرية الاستقرار وعرض أهم النتائج في دراسة جملة المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة من النموذج:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A.x(t) \quad ; \quad A = \text{Const}$$

مع أمثلة توضيحية لهذه النتائج وكما تضمنت أيضاً عرضاً لنتائج دراسة النموذج لجملة معادلات تفاضلية ذات معاملات متحولة :

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t).x(t)$$

مع أمثلة توضح هذه النتائج.

الفصل الثاني:

ويتضمن بعض المفاهيم الأساسية المتعلقة بجمل المعادلات التفاضلية العشوائية واستقرارها والمفاهيم الاحتمالية وأهم النتائج من دراسة النموذج: $\frac{dx(t)}{dt} = A(t,\xi(t))\,x(t) \; ; \; \dim x = m$

والنموذج : $\frac{dx(t)}{dt} = A(\xi(t))\,x(t)$

مع أهم المبرهنات من هذه الدراسة.

الفصل الثالث:

ويتم فيه دراسة النموذج:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t,\xi(t))\,x(t) + \sum_{h=1}^{n} B_h(\xi(t))\,x(t)$$

وإثبات مبرهنات وخواص متعلقة بهذه الدراسة.

وأخيراً ننوه إلى أن البحث قسم إلى ثلاثة فصول أخذت الأرقام (1-2-3) وكل فصل كان ترقيم فقراته على الشكل التالي (1-1-15) والذي يعني البند الخامس عشر في الفقرة الأولى من الفصل الأول والرمز [1] يعني الإشارة إلى المرجع الأول.

الفصل الأول

إنشاء تابع ليابونوف ودراسة استقرار جملة تفاضلية ذات معاملات ثابتة ومتحولة

سنذكر بعض المفاهيم الأساسية المتعلقة بالاستقرار:

1-1- المجموعات – الجبور – القياسات :

1-1-1- المجموعة:

تعريف (1) :

المجموعة هي عبارة عن تجميع عناصر اختيارية تشترك مع بعضها بصيغة معينة والمجموعة الخالية هي مجموعة لا تحوي أي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ .

لتكن Ω مجموعة غير خالية إن الصف (الأسرة) المكون من جميع المجموعات الجزئية من Ω يدعى مجموعة أجزاء Ω ونرمز له بالرمز $p(\Omega)$ أو 2^{Ω}.

1-1-2- الجبر:

لتكن $\Omega \neq \phi$ مجموعة غير خالية و $p(\Omega)$ مجموعة أجزاء Ω وليكن $G \subseteq p(\Omega)$ ندعو G جبراً إذا تحققت الشروط التالية:

1) $\phi \in G \;\; ; \;\; \Omega \in G$

2) $\forall A,B \in G \Rightarrow A \bigcup B \in G$

3) $\forall A \in G \Rightarrow A^{C} \in G \;\; ; \; A^{C} = \Omega - A$

1-1-3- الجبر التام (الجبر – σ):

ليكن $S \subseteq p(\Omega)$ ندعو الصف S جبراً تاماً على Ω إذا تحققت الشروط التالية:

1) $\phi \in S \;\; ; \;\; \Omega \in S$

2) $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} C S \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in S$

3) $\forall A \in S \Rightarrow A^{C} \in S$

بكلام آخر الجبر يصبح جبراً تاماً إذا كان مغلق بالنسبة للاجتماع العدود .

1-1-4- تابع المجموعة :

ندعو التابع φ تابع مجموعة إذا كانت مجموعة تعريفه صف غير خالٍ من المجموعـات ويأخذ قيمة في حقل الأعداد الحقيقية الموسعة :

$$\varphi : G \longrightarrow \overline{R}$$
$$A \longrightarrow \varphi(A) \in \overline{R}$$

1-1-5- تابع المجموعة الجمعي:

تابع المجموعة الجمعي φ هو تابع معرف على صف مجموعات غير خـالٍ G ويحقـق الشرطين التاليين:

1) مجموعة قيم التابع φ لا تحوي القيمتين $+\infty$ و $-\infty$ معاً بآن واحد .

2) $\forall A,B \in G; A \bigcup B \in G \; ; A \bigcap B = \phi \; ; \varphi(A \bigcup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$

ويمكن تعميم الخاصة الثانية على النحو التالي:

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(A_i); \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in G \; ; \underset{i \neq j}{A_i \bigcap A_j} = \phi$$

ندعو كل تابع مجموعة جمعي أنه تابع مجموعة جمعي تام أو (σ – جمعي) إذا تحقق الشرط التالي:

إذا كانت $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر G بحيث أن $A_i \bigcap A_j = \phi$ و $i \neq j$ و $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in G$

فإن:

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i)$$

مع ملاحظة أنه إذا كان الصف G جبراً (على الأقل) فإننا نضمن بذلك من الخاصة الجمعية أن $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in G$ من أجل $\{A_1,A_2,\ldots,A_n\} \in G$ وإذا كان G جبراً تاماً فإن التابع الذي يحقق

الخاصة $(\sigma -$ جمعية) نضمن من خلاله أن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in G$ من أجل أي متتالية $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in G$ من المجموعات المنفصلة مثنى مثنى.

*** خواص تابع المجموعة الجمعي :**

ليكن φ تابع لمجموعة جمعي معرف على الجبر التام S في Ω فعندئذٍ:

1) $\varphi(\phi) = 0$

2) $\forall A, B \in S; A \subset B; |\varphi(A)| < \infty \Rightarrow \quad \varphi(B \setminus A) = \varphi(B) - \varphi(A)$

3) $\forall A, B \in S; A \subset B; |\varphi(B)| < \infty \Rightarrow |\varphi(A)| < \infty$

4) $\forall A, B \in S \Rightarrow \varphi(A \bigcup B) = \varphi(A) + \varphi(B) - \varphi(A \bigcap B)$

$$\varphi(A \setminus B) = \varphi(A) - \varphi(A \bigcap B)$$
$$\varphi(B \setminus A) = \varphi(B) - \varphi(A \bigcap B)$$

كما ويقال عن φ إنه محدود إذا كانت له قيمة محدودة على Ω ويقال عن φ إنه $\sigma -$ محدود إذا كان الفضاء الكلي المعرف عليه الجبر التام S يمكن تجزئته إلى مجموعات قابلة للعد في S والتي قيم φ من أجلها محدودة.

ملاحظة (1) :

تدعى الثنائية (Ω, S) حيث Ω مجموعة غير خالية و S جبراً تاماً معرفاً على Ω فضاءاً قيوساً.

1-1-6- القياس الموجب:

ليكن μ تابع مجموعة معرف على الجبر التام S في Ω يدعى μ قياساً موجباً على S إذا كان μ تابع مجموعة جمعياً تاماً غير سالب بمعنى آخر إذا حقق التـابع: $\mu : S \longrightarrow [0, +\infty]$ الشروط التالية:

1) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i); \forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} CS; A_i \bigcap A_j = \underset{i \neq j}{\phi}$

2) $\mu(A) \geq 0 \;;\; \forall A \in S$

3) $\mu(\phi) = 0$

حيث : $A_1, A_2, ...$ قابلة للعد.

$$|\mu(A_i)| < \infty \;\; ; \; i = 1, 2, ...$$

القيمة $\mu(A)$ تدعى قياس المجموعة A .

ملاحظة (2):

تدعى الثلاثية (Ω, S, μ) فضاءً مقيساً مع القياس μ واختصاراً فضاءً مقيساً.

1-1-7- المجموعة القيوسة:

تدعى كل مجموعة تنتمي إلى الجبر التام S في الفضاء المقيس (Ω, S, μ) مجموعة قابلة للقياس (أو مجموعة قيوسة) وفق μ .

1-1-8- القياس المنتهي:

يقال عن قياس μ إنه قياس منتهٍ (أو قياس محدود) على Ω إذا كان $\mu(\Omega) < \infty$.

1-1-9- القياس المنظم:

القياس المعرف على الصف الحاوي للفضاء الكلي يدعى قياساً منظماً (أو احتمالياً) إذا كانت قيمته من أجل الفضاء الكلي تساوي الواحد أي: $\mu(\Omega) = 1$ ويرمز له بالرمز P.

1-1-10- المجموعة الهمولة (ذات القياس المعدوم):

ليكن (Ω, S, μ) فضاءً مقيساً ولنفرض أن $A \subset \Omega$ تدعى المجموعة A همولة بالنسبة للقياس μ إذا كانت A مجموعة جزئية من مجموعة قيوسة B قياسها معدوم وبشكل رمزي:

$$A \subset \Omega \text{ (همولة بالنسبة لـ } \mu) \Leftrightarrow \exists B \in S; A \subset B \wedge \mu(B) = 0$$

ومنه نستنتج مما سبق أن المجموعة الهمولة هي المجموعة التي قياسها معدوم.

1-1-11- الخاصة المحققة تقريباً في كل مكان:

يقال عن خاصة ما * تتعلق بنقط المجموعة Ω أنها محققة تقريباً في كل مكان بالنسبة للقياس μ إذا كانت مجموعة النقط x من Ω والتي لا تحقق الخاصة * مجموعة همولة بالنسبة للقياس μ.

1-1-12- القياس التام (Complete):

يدعى القياس μ المعرف على الجبر التام S في Ω أنه قياس كامل إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall A \subset B \; ; \; B \in S \wedge \mu(B) = 0 \Rightarrow A \in S$$

بمعنى آخر أنه إذا كانت كل مجموعة مهمولة بالنسبة لـ μ عنصراً من الجبر التام S.

1-1-13- القياس:

إذا كان (Ω,S) فضاءاً قيوساً وكان:

$$\mu : S \longrightarrow \overline{R}$$

تابع مجموعة محقق للشروط التالية:

1) $\mu(\phi) = 0$

2) $\forall A \in S \; ; \; -\infty < \mu(A) \leq +\infty$

3)

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in S$ بحيث أن : $A_i \cap A_j = \phi$ و $i \neq j$ فينتج أن:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

فعندئذٍ ندعو μ قياساً حقيقياً منتهياً على S، إذا حقق الشرطين 1 و 3 والشرط:

$$\forall A \in S \; ; \; |\mu(A)| < \infty$$

سنرمز لمجموعة جميع القياسات الحقيقية المنتهية والمعرفة على الفضاء القيوس (Ω,S) بـ $M(\Omega,S)$.

ملاحظة (3):

كل قياس حقيقي يكون قياساً موجباً إذا حقق الشرط التالي:

$$\forall A \in S \Rightarrow \mu(A) \geq 0$$

1-1-14- القياس العقدي:

ليكن (Ω,S) فضاء قيوساً فعندئذٍ يدعى تابع المجموعة μ المعرف على الجبر التام S ويأخذ قيمه في حقل الأعداد العقدية الموسعة:

$$\mu : S \longrightarrow \overline{C}$$

ويحقق الشرطين التاليين:

$$1)\quad \mu(\phi) = 0$$

$$2)\quad \{A_i\}_{i=1}^{\infty} CS \,;\, A_i \cap A_j = \varphi \,;\, i \neq j \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

قياساً عقدياً على S.

مبرهنة (1) :

إذا كان (Ω,S) فضاءاً قيوساً وكان:

$$\mu = \mu_1 + i\,\mu_2$$

تابع مجموعة عقدي على S عندئذٍ يكون الشرطان التاليان متكافئان:

1- μ قياس عقدي على S.

2- μ_1 و μ_2 ينتميان إلى $M(\Omega,S)$.

وإذا كان μ قياساً عقدياً فنستطيع كتابته على النحو التالي:

$$\mu = \mu_R + i\,\mu_I$$

حيث أن $\mu_R = \text{Re}\,\mu$ و $\mu_I = \text{Im}\,\mu$ وإن :

$$\mu_I, \mu_R \in M(\Omega,S)$$

مبرهنة (2) :

إذا كان $\mu_1, \mu_2 \in M(\Omega,S)$ وإذا عرفنا على $M(\Omega,S)$ عملية الجمع كما يلي:

$$\forall A \in S; (\mu_1 + \mu_2)(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A)$$

وعملية الضرب بعدد حقيقي $a \ni R$ كما يلي:

$$\forall a \in R; A \in S; (a\,\mu)(A) = a.\mu(A)$$

فعندئذٍ $(M(\Omega,S),+,\bullet)$ تشكل فضاء خطياً.

1-2- التطبيقات والتوابع القيوسة:

1-2-1- تعريف جبر بوريل :

لتكن $R = (-\infty, +\infty)$ مجموعة الأعداد الحقيقية يسمى الجبر التـام الأصـغري المولـد بصف كل المجالات (مفتوحة، مغلقة، نصف مفتوحة، نصف مغلقة) جبر بوريل في R ونرمـز له بـ B_R. وتدعى عناصر الصف B_R بمجموعات بوريلية في R بذلك يكون (R,B_R) فـضاء قيوساً .

1-2-2- التطبيق القيوس :

ليكن (Ω_1,S_1) و (Ω_2,S_2) فضاءين قيوسين وليكن التطبيق :

$$f:(\Omega_1,S_1)\longrightarrow(\Omega_2,S_2)$$

تطبيقاً من الفضاء (Ω_1,S_1) في الفضاء (Ω_2,S_2) يقال عن f أنه قيوس بالنسبة للجبرين التامين S_1 و S_2 إذا كان الشرط التالي محققاً:

$$f^{-1}(S_2)\, C\, S_1$$

والذي يعني بدوره أن:

$$\forall F\in S_2; f^{-1}(F)\, C\, S_1$$

1-2-3- التابع القيوس :

ليكن (Ω,S) فضاءاً قيوساً وليكن (R,B_R) الفـضاء القيـوس البـوريلي يـدعى التـابع $f:\Omega\longrightarrow R$ أنه تابع S – قيوس إذا كان f قيوساً بالنسبة للجبرين التـامين S و B_R أي إذا كان:

$$f^{-1}(B_R)CS \Leftrightarrow \forall E\in B_R;\ f^{-1}(E)\in S$$

ملاحظة (4) :

*) إذا كان $f:R\longrightarrow R$ يسمى تابعاً بوريلياً إذا كان f قيوساً بالنسبة للجبر التام B_R.

*) من جهة أخرى يلزم ويكفي لكي يكون التابع $f:\Omega\longrightarrow R$ S - قيوس هو أن تتحقق إحدى الشروط التالية:

$$\left.\begin{array}{l}\{f \ge a\} \in S\\ \{f \le a\} \in S\\ \{f > a\} \in S\\ \{f < a\} \in S\end{array}\right\} ;\ \forall a \in R$$

حيث أن :

$$\begin{array}{l}\{f \ge a\} = \{x \in \Omega\ ;\ f(x) \ge a\} \in S\\ \{f \le a\} = \{x \in \Omega\ ;\ f(x) \le a\} \in S\\ \{f > a\} = \{x \in \Omega\ ;\ f(x) > a\} \in S\\ \{f < a\} = \{x \in \Omega\ ;\ f(x) < a\} \in S\end{array}$$

مبرهنة (3) :

إذا كان $\left\{\begin{array}{l} f_1 : \Omega \longrightarrow R \\ f_2 : \Omega \longrightarrow R \end{array}\right\}$ تابعين S – قيوسين فعندئذٍ كل من التوابع:

$f_1 . f_2$, $f_1 + f_2$, $f_1 - f_2$ هو تابع S – قيوس.

ملاحظة (5) :

إذا كان (Ω,S) فضاء قيوساً وكان (R,B_R) الفضاء القيوس البوريلي وكان $f : \Omega \longrightarrow R$ تابعاً معرفاً على Ω ويأخذ قيمة في R فإن من المعلوم أن الجزء الموجب والجزء السالب للتابع f يعرفان بالشكل:

$$f^{+}(x) = \max\{\ f(x), 0\ \} ; \forall x \in \Omega$$

$$f^{-}(x) = -\min\{\ f(x), 0\ \} = \max\{\ -f(x), 0\ \}\ ;\ \forall x \in \Omega$$

نتيجة (2) :

ليكن (Ω,S) فضاء قيوساً إن الشرط اللازم والكافي ليكون التابع f S– قيوس هو أن يكون كل من التابعين f^{+} و f^{-} تابعاً S – قيوس.

ملاحظة (6) :

يكون التابع $f = (f_1,\ldots,f_n)$ قيوساً إذا وفقط إذا كانت كل مركبة f_i حيث $i = 1,2,\ldots,n$ هي تابع قيوس. [5]

1-3- بعض أنواع الفضاءات :

1-3-1- تعريف تابع البعد (المسافة) :

لتكن Ω مجموعة غير خالية وليكن d تابعاً عددياً معرفاً بالعلاقة:

$$d:\Omega\times\Omega\longrightarrow R$$
$$(x,y)\longrightarrow d(x,y)$$

محققاً للشروط التالية:

1) $d(x,y)\geq 0;\forall x,y\in\Omega\wedge d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$

2) $d(x,y)=d(y,x)\ ;\ \forall x,y\in\Omega$

3) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)\ ;\ \forall x,y,z\in\Omega$

نسمي d مسافة معرفة على Ω ويدعى العدد غير السالب d(x,y) بالبعد بين العنصرين x و y.

1-3-2- الفضاء المتري:

لتكن Ω مجموعة غير خالية وd تابع مسافة معرف على Ω تسمى الثنائية (Ω,d) فضاء مترياً.

1-3-3- الفضاء الخطي :

لتكن Ω مجموعة غير خالية وليكن K حقل الأعداد الحقيقية (أو العقدية) نسمي Ω فضاء خطياً إذا أمكن تعريف عمليتين على عناصرها الأولى الجمع (+) والثانية الضرب (.) بعدد من الحقل K بحيث تتحقق الشروط التالية:

1) $\forall x,y\in\Omega\ \Rightarrow\ x+y\in\Omega$

ويتحقق لدينا:

$$x+y=y+x\ ;\ \forall x,y\in\Omega$$
$$x+(y+z)=(x+y)+z\ ;\ \forall x,y,z\in\Omega$$
$$\forall x\in\Omega\ \ \exists\theta\in\Omega\ ;\ x=x+\theta$$

ندعو θ العنصر الصفري أو صفر الفضاء Ω .

$$\forall x\in\Omega\ \ ;\ \ \exists x'\in\Omega\ \ ;\ \ x+x'=\theta$$

ندعو x′ نظير x بالنسبة للجمع (+).

حيث θ و x′ وحيدان.

$$2)\ \ \forall x \in \Omega\ ;\ \forall \lambda \in K \Rightarrow \lambda x \in \Omega$$

ويكون لدينا:

$$\lambda.(\mu x) = (\lambda \mu).x\ \ ;\ \forall x \in \Omega\ \ ;\ \forall \lambda, \mu \in K$$

$$\lambda.(x + y) = \lambda x + \lambda y\ \ \ \forall x, y \in \Omega\ ;\ \forall \lambda \in K$$

$$(\lambda + \mu).x = \lambda x + \mu x\ \ ;\ \forall x \in \Omega\ ;\ \forall \lambda, \mu \in K$$

$$1.x = x\ \ ;\ \forall x \in \Omega$$

1-3-4- الاستقلال الخطي :

لتكن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عناصر من الفضاء الخطي Ω يقال عن هذه العناصر أنهـا مـستقلة خطياً في Ω إذا تحقق الشرط:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = \theta$$

فقط من أجل $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n = 0$

وإذا كان أحد الأمثال السابقة على الأقل مختلفاً عن الصفر يقال عن هذه العناصر إنها مرتبطة خطياً.

ملاحظة (7) :

يدعى الفضاء الخطي أنه ذو N بعد إذا وجد فيه N عنصراً مستقلاً خطياً وكان كل $(N + 1)$ عنصر من عناصره مرتبطة خطياً وإذا من أجل أي عدد طبيعي N وجد N عنصراً مستقلاً خطياً فإننا نقول عن Ω أنه لا نهائي البعد.

1-3-5- الفضاء الخطي المنظم:

يقال عن الفضاء الخطي Ω إنه منظم إذا أمكن مقابلة كل عنصر $x \in \Omega$ بعـدد حقيقـي نرمز له بالرمز $\|x\|$ بحيث تتحقق الشروط التالية:

$$1)\ \ \|x\| \geq 0\ ;\ \forall x \in \Omega \wedge \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$2)\ \ \|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|\ ;\ \forall \lambda \in K\ ;\ \forall x \in \Omega$$

$$3)\ \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|\ \ ;\ \forall x, y \in \Omega$$

(متراجحة المثلث).

يدعى العدد $\|x\|$ بنظيم العنصر x.

ونعلم أنه في الفضاء الخطي الواحد يمكن تعريف أكثر من نظيم.

نتيجة (3) :

بفرض أن Ω فضاء خطي منظم ولنعرف التابع d كما يلي:

$$d : \Omega \times \Omega \longrightarrow R$$

$$(x, y) \longrightarrow d(x, y) = \| x - y \|$$

فنجد أن d يشكل مسافة على Ω وبالتالي فإن كل فضاء خطي منظم هو فضاء متري إلا أن العكس غير صحيح في الحالة العامة ولكن إذا كان لدينا فضاء مترياً وأردنا إثباته أنه منظم يجب علينا التأكد من أن $d(x,\theta)$ تحقق شروط النظيم وعندها نكتب :

$$d(x, \theta) = \| x \|$$

ملاحظة (8) :

يقال عن متتالية $\{x_n\}$ من عناصر الفضاء الخطي المنظم Ω إنها متقاربة في Ω من العنصر x إذا كان:

$$\lim_{n \to +\infty} \| x_n - x \| = 0$$

ونكتب $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$ أو $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.

يقال إن المتتالية $\{x_n\}$ أساسية في Ω إذا تحقق الشرط التالي:

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ m \to +\infty}} \| x_n - x_m \| = 0$$

1-3-6- الفضاء التام:

يقال عن الفضاء الخطي المنظم إنه تام إذا كانت كل متتالية أساسية فيه متقاربة من عنصر ينتمي إليه.

1-3-7- فضاء باناخ:

إذا كان Ω فضاء خطياً منظماً وتاماً فإنه يدعى فضاء باناخ.

1-3-8- فضاء الجداء الداخلي:

ليكن Ω فضاء خطياً عقدياً تشكل Ω فضاء جداء داخلي إذا أمكن مقابلة كل عنصرين x,y $\in \Omega$ بعدد عقدي وحيد نرمز له بالرمز $\langle x,y \rangle$ بحيث تتحقق الشروط التالية:

$$1)\ \langle x,x \rangle \geq 0\ ;\ \forall x \in \Omega \wedge \langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$2)\ \overline{\langle x,y \rangle} = \langle y,x \rangle ; \forall x,y \in \Omega$$

$$3)\ \langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 , y \rangle = \lambda_1 \langle x_1 , y \rangle + \lambda_2 \langle x_2 , y \rangle$$

$$\forall x_1, x_2, y \in \Omega\ ;\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$$

يدعى العدد $\langle x,y \rangle$ الجداء الداخلي للعنصرين x و y.

ملاحظة (9) :

يتحقق في أي فضاء جداء داخلي ما يلي:

$$\forall x,y \in \Omega\ ;\ \left| \langle x,y \rangle \right| \leq \sqrt{\langle x,x \rangle} . \sqrt{\langle y,y \rangle}$$

وتدعى متراجحة شفارتز.

النظيم في فضاء الجداء الداخلي يعطى بالعلاقة:

$$\forall x \in \Omega\ \ ;\ \ \| x \| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$$

كل فضاء جداء داخلي هو فضاء خطي منظم والنظيم فيه يعرف بدلالة الجداء الداخلي.

1-3-9- فضاء هيلبرت:

ليكن Ω فضاء جداء داخلي يقال إن Ω فضاء هيلبرت إذا كان Ω تاماً.

ملاحظة (10) :

في فضاء هيلبرت يتحقق ما يلي:

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2\left(\| x \|^2 + \| y \|^2 \right)$$

وتدعى مساواة متوازي الأضلاع.

1-4- القيم الذاتية والمتجهات الذاتية :

لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة $(m \times m)$ نقول عن المتجه X $(X \neq \theta)$ إنه متجـه ذاتي للمصفوفة A موافق للقيمة الذاتية λ إذا تحقق الشرط التالي:

$$A \, . \, X = \lambda \, X$$

إن العلاقة السابقة تكتب على الشكل :

$$\lambda X - A X = 0 \;\Rightarrow (\lambda E - A) X = 0$$

لإيجاد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية الموافقة للقيم الذاتية الناتجة نأخذ معين المصفوفة $(\lambda E - A)$ ونجعله مساوياً للصفر:

$$\det(\lambda E - A) = 0$$

في هذه الحالة نحصل على المتجهات الذاتية اليمينية.

أما في حال المتجهات الذاتية اليسارية للمصفوفة A يكون لدينا:

$$Y A = Y \lambda \;\Rightarrow\; Y(\lambda E - A) = 0$$

للحصول على كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A ومن خلالها المعادلة المميزة نكتب:

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^{m} + a_{m-1} \lambda^{m-1} + a_{m-2} \lambda^{m-2} + ... + a_0 = 0$$

بما أن المصفوفة A مربعة من المرتبة $m \times m$ فيوجد m قيمة ذاتية على الأكثر.

- إذا كانت القيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ مختلفة عن بعضها البعض فإن المتجهات الذاتية الموافقة لهذه القيم الذاتية $x_1, x_2, \ldots, x_m$ تكون مستقلة خطياً.
- إذا كانت القيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ليست مختلفة (يوجد تكرار ببعضها) فإن المتجهات الذاتية الموافقة للمكررة تكون مرتبطة خطياً.

1-5- تابع مصفوفة :

لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة $m \times m$ (جميع قيمها الذاتية مختلفة مثنى مثنى) وليكن f كثير حدود من الدرجة n معرف بالشكل:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$$

عندئذٍ يكون تابع المصفوفة A معطى بالعلاقة:

$$f(A) = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_n A^n$$

$$\Rightarrow f(A).X_K = (a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_n A^n).X_K =$$

$$= a_0 X_K + a_1 A X_K + a_2 A X_K + ... + a_n A^{n-1} A X_K$$

إذا كان X_K متجه ذاتي موافق للقيمة الذاتية λ_K أي أن $AX_K = \lambda_K X_K$ فإنه بالتعويض نجد أن:

$$f(A).X_K = a_0 X_K + a_1 \lambda_K X_K + a_2 A(\lambda_K X_K) + ... + a_n A^{n-1} \lambda_K A X_K$$

$$= a_0 X_K + a_1 \lambda_K X_K + a_2 \lambda_K^2 X_K + ... + a_n \lambda_K^2 X_K$$

$$= f(\lambda_K) X_K$$

لتكن $X_1, X_2, \ldots, X_m$ المتجهات الذاتية الموافقة للقيم الذاتية λ_K للمصفوفة A وليكن f(A) تابعاً للمصفوفة .

لنأخذ التابع : $\varphi(z) = \det(Ez - A)$

لدينا أن: $\varphi(A) X_K = \varphi(\lambda_K) X_K = 0 \ ; \ K = 1, 2, ..., m$

ومنه:

$$\varphi(A).T = 0 \ ; \ T = (X_1 \ \ X_2 \ \ X_3 \ .....X_m)$$

$$\varphi(A) T.T^{-1} = 0 \Rightarrow \varphi(A) = 0$$

ومنه نستطيع كتابة تابع المصفوفة f(z) بالشكل التالي:

$$f(z) = g(z).\, \varphi(z) + h(z)$$

بما أن $\varphi(A) = 0$ ينتج أن: $f(A) = h(A)$

ومنه: $\varphi(\lambda_K) = 0 \Rightarrow f(\lambda_K) = h(\lambda_K) \ ; K = 1, 2, ..., m$

وحسب المرجع [5] نجد أن: $h(z) = \sum_{k=1}^{m} f(\lambda_k) \varphi_k(z)$

حيث:

$$\varphi_1(z) = \frac{(z-\lambda_2)(z-\lambda_3).....(z-\lambda_m)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3).....(\lambda_1-\lambda_m)}$$

$$\varphi_2(z) = \frac{(z-\lambda_1)(z-\lambda_3).....(z-\lambda_m)}{(\lambda_2-\lambda_1)..........(\lambda_2-\lambda_m)}$$

$$\vdots$$

$$\varphi_m(z) = \frac{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2).....(z-\lambda_{m-1})}{(\lambda_m-\lambda_1)..........(\lambda_m-\lambda_{m-1})}$$

ومنه تابع المصفوفة يعطى بالدستور: $f(A)=\sum_{k=1}^{m} f(\lambda_k)\varphi_k(A)$

والذي يكتب بالصورة :

$$f(A)=\sum_{k=1}^{m} f(\lambda_k)P_k$$

حيث : $P_k=\varphi_k(A) \quad ; \quad k=1,2,...,m$

1-6- نظرية الاستقرار:

يعد مفهوم الاستقرار من أهم المفاهيم في نظرية الجمل الديناميكية حيث أنه واكب تطـور جميع العلوم الرياضية والفيزيائية والميكانيكية بشكل عام استقرار أي جملة ديناميكية: هو قـدرة الجملة على مقاومة تأثير صغير أو اضطراب غير معلوم مسبقاً، فتكون الجملة مستقرة إذا لـم يغيرها ذلك الاضطراب جوهرياً ونعلم من نظرية التحكم الكلاسيكية أنه عنـد دراسـة تـصميم لنظام تحكم يجب التأكد من أن النظام مستقر من المدخل إلى المخرج ومثل هذه المسألة تتطلـب صياغة مفاهيم الاستقرار من وجهة نظر رياضية.

فمثلاً لدراسة استقرار الجملة الخطية :

$$\frac{dx(t)}{dt}=A\,x(t) \tag{1-1}$$

حيث : $x(t_0)=x_0$.

أي لدراسة استقرار أي حل لهذه المعادلة يكفي دراسة استقرار الحل الابتدائي.

1-6-1- تعريف:

يكون الحل الابتدائي للجملة (1-1) :

1- مستقراً :

إذا وجد من أجل كل $\varepsilon>0$ عدد $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ بحيث إذا كان $\|X(t_0)\|<\delta$ عندئـذٍ: $\|X(t)\|<\varepsilon$ من أجل كل $t>t_0$.

2- مستقراً استقراراً مقارباً :

إذا كان مستقراً ووجد $\delta>0$ بحيث إنه إذا كان $\|X(t_0)\|<\delta$ فإن $\lim_{t\to\infty}\|X(t)\|=0$.

3- مستقراً بانتظام :

إذا وجد من أجل كل $\varepsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ بحيث من أجل أي حل $X(t)$ للمعادلة (1-1) يحقق العلاقة $\|X(t_1)\| < \delta$; $t_0 \le t_1$ فإن $\|X(t)\| < \varepsilon$ حيث $t_1 \le t < \infty$.

4- مستقراً استقراراً مقارباً بانتظام :

إذا كان مستقراً بانتظام ووجد عدد $\delta > 0$ بحيث من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $T = T(\varepsilon)$ بحيث أي حل $X(t)$ للمعادلة (1-1) حيث $\|X(t_1)\| < \delta$; $t_1 \ge t_0$ ويحقق $\|X(t)\| < \varepsilon$;$t_1 + T \le t < \infty$

5- مستقراً بقوة :

إذا وجد من أجل كل $\varepsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ بحيث إن أي حل $X(t)$ للمعادلة (1-1) يحقق $\|X(t_0)\| < \delta$ عندئذٍ $\|X(t)\| < \varepsilon$ و$t_0 \le t < +\infty$.

6- مستقراً استقراراً أسياً :

إذا كان أي حل $X(t)$ للمعادلة (1-1) يحقق العلاقة :

$$\|X(t)\| \le \beta \|X(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)}$$

حيث $t > 0$ و $\alpha > 0$ و $\beta > 0$.

1-6-2- نظرية ليابونوف حول الاستقرار:

1- تكون نقطة الأصل $x = 0$ ذات وضع توازن مستقر إذا كان التابع $V(x)$ محققاً لما يلي:

1) $V(x) > 0$ من أجل $x \ne 0$.

2) $V(0) = 0$.

3) $V(x)$ يملك مشتقات جزئية مستمرة ضمن جوار نقطة الأصل.

4) $V'(x) \le 0$ من أجل $x \ne 0$ وx واقعة ضمن جوار نقطة الأصل .

2- تكون نقطة الأصل مستقرة استقراراً مقارباً من أجل اضطرابات غير كبيرة لا تؤثر على توازن الجملة إذا كان التابع $V(x)$ يحقق ما يلي:

1) $V(x) > 0$ من أجل $x \ne 0$.

2) $V(0) = 0$.

3) $V(x)$ يملك مشتقات جزئية مستمرة مع الأخذ بعين الاعتبار كل مركبات x.

4) $V'(x) < 0$ من أجل $x \neq 0$ حيث x واقعة في جوار نقطة الأصل.

3- تكون نقطة الأصل مستقرة استقراراً مقارباً من أجل اضطرابات كبيرة مفاجئة تزيح الجملة عن وضع توازنها ثم تعود للتوازن إذا كان التابع $V(x)$ يحقق ما يلي:

1) $V(x) > 0$ من أجل $x \neq 0$.

2) $V(0) = 0$.

3) $V(x)$ يملك مشتقات جزئية مستمرة.

4) $V'(x) \leq 0$ من أجل $x \neq 0$ حيث x واقعة بجوار نقطة الأصل وتحقق :

$$V(x) \longrightarrow \infty$$
$$\| x \| \longrightarrow \infty$$

ملاحظة (11) :

إن التابع $V(x)$ المذكور في المبرهنة أعلاه (1-6-2) يسمى تابع ليابونوف ووجوده يعني تماماً استقرار حل الجملة المدروسة.

1-7- إنشاء تابع ليابونوف :

في البداية سيتم عرض بعض النتائج الأساسية في دراسة استقرار جملة المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة على الصورة:

$$\frac{dX(t)}{dt} = A.X(t) \;;\; A = Const \qquad (1\text{-}1)$$

والموافقة للشرط الابتدائي $X(0) = X_0$.

من أجل ذلك يمكن وضع حل المعادلة السابقة (1) وذلك $\forall t \geq 0$:

$$X(t) = e^{At} X(0)$$

ومنه:

$$\| X(t) \| = \| e^{At} X(0) \| \leq \| e^{At} \| . \| X(0) \| \qquad (2\text{-}1)$$

وحتى تكون الجملة مستقرة استقراراً مقارباً يجب أن تحقق:

$$\lim_{t\to+\infty}\left\| e^{At} \right\| = 0$$

لنبحث في الشروط الموافقة لهذا الاستقرار.

بفرض المصفوفة A تملك قيم ذاتية مختلفة مثنى مثنى هي $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ عندئذٍ يمكن أن نكتب:

$$e^{At} = T\, e^{\wedge t}\, T^{-1}$$

حيث T مصفوفة الانتقال وT^{-1} مقلوب مصفوفة الانتقال وأما بالنسبة لـ $e^{\wedge t}$ فهي مصفوفة قطرية تعطى بالصورة:

$$e^{\wedge t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & e^{\lambda_N t} \end{bmatrix}$$

لو أخذنا النظيم هو عبارة عن :

$$\| A \| = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left| a_{ij} \right|$$

عندئذٍ :

$$\left\| e^{At} \right\| = \left\| T e^{\wedge t} T^{-1} \right\| \le \| T \| . \left\| T^{-1} \right\| . \left\| e^{\wedge t} \right\| = C. \left\| e^{\wedge t} \right\|$$

$$\Rightarrow \left\| e^{At} \right\| \le C. \left\| e^{\wedge t} \right\|$$

ولدينا: $$\left\| e^{\wedge t} \right\| = \sum_{i=1}^{N} \left| e^{\lambda_N t} \right| = \sum_{i=1}^{N} e^{\mathrm{Re}\,\lambda_i t}$$

وبالتالي حتى يتحقق أن: $\lim_{t\to+\infty}\left\| e^{\wedge t} \right\| = 0$ يجب تحقق أن $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$ حيث $i = 1, 2, \ldots, N$.

عندها فإن $\lim_{t \to +\infty} \| e^{At} \| = 0$ وبالتالي ومن المتراجحة (2-1) نجد أن:

$$\lim_{t \to +\infty} \| X(t) \| = 0$$

وبالتالي نحصل على النتائج التالية :

1) حتى تكون الجملة مستقرة استقراراً مقارباً يجب أن تكون كل القيم الذاتية للمصفوفة A (مصفوفة الأمثال) تقع في القسم الأيسر من المستوي العقدي سواء أكانت القيم مختلفة أم مكررة.

2) حتى تكون الجملة مستقرة يجب أن تكون كل القيم الذاتية للمصفوفة A إما في القسم الأيسر من المستوي العقدي أو على المحور التخيلي.

بالنسبة للقيم الذاتية الموجودة في القسم الأيسر من المستوي العقدي ربما تكون مختلفة أو مكررة أما القيم الموجودة على المحور التخيلي فيجب أن تكون مختلفة.

3) تكون الجملة غير مستقرة إذا وجدت قيمة ذاتية واحدة على الأقل في القسم الأيمن من المستوي العقدي أو وجدت قيم ذاتية مكررة على المحور التخيلي.

*** طريقة ليابونوف الأولى في الاستقرار:**

قبل البدء بدراسة استقرار الجملة الثابتة $X^{\bullet} = A X$ بطريقة ليابونوف لا بد أن نستعرض تفريق طيف مصفوفة.

1-7-1- تفريق طيف المصفوفة :

لنوجد المصفوفة T مصفوفة الانتقال الموافقة للمصفوفة A ولنفرض أن $X_1, X_2, \ldots, X_N$ هي الأعمدة الموافقة للأشعة الذاتية في المصفوفة T والمقابلة للقيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$.

ولنوجد T^{-1} عندئذٍ من أجل ذلك توجد مصفوفة قطرية J تحقق :

$$J = T^{-1} A T \;\; ; \;\; J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_N \end{pmatrix}$$

ومنه يكون:

$$T J = AT$$

$$J T^{-1} = T^{-1} A$$

ولتكن $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ أسطر في المصفوفة T^{-1} عندئذٍ يمكن تعريف المساقط P_K بالصورة:

$$P_K = X_K Y_K \quad ; \; K = 1, 2, \ldots, N$$

ويكون:

$$Y_K X_K = 1 \; ; \; Y_K . X_S = 0 \ldots . K \neq S \quad ; \quad K, S = 1, 2, \ldots, N$$

ومنه فإن المساقط P_K تحقق :

$$P_K . \; P_K = (X_K Y_K) (X_K Y_K) = X_K (Y_K X_K) Y_K = X_K . \; 1 Y_K$$

$$= X_K Y_K = P_K$$

$$P_K . P_S = (X_K Y_K) (X_S Y_S) = X_K (Y_K X_S) Y_S = X_K . 0 . Y_S = 0$$

وأيضاً: $P_1 + P_2 + \ldots + P_N = I$

حيث I المصفوفة الواحدية من نفس سعة A.

ومن عملية حساب المساقط P_K نستطيع الوصول إلى التحليل الطيفي للمصفوفة A :

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_N P_N$$

الآن لنفرض التابع $f(z)$ الذي يعطى منشوره بالعلاقة :

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_N z^n + \ldots$$

حيث z متحول عقدي وذلك في النطاق $|z| < R$ ولنعرف تابع المصفوفة:

$$f(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_N A^N + \ldots$$

بملاحظة أن: $A^N = \lambda_1^N P_1 + \lambda_2^N P_2 + \ldots + \lambda_N^N P_N$

يمكن التوصل إلى العلاقة العامة:

$$f(A) = f(\lambda_1) P_1 + f(\lambda_2) P_2 + \ldots + f(\lambda_N) P_N$$

مثال (1-1) :

لندرس التحليل الطيفي للمصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

الحل :

إن القيم الذاتية الموافقة للمصفوفة A هي:

$$\lambda_1 = 5 \ , \ \lambda_2 = -1$$

والمتجهات الذاتية الموافقة لها هي:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

عندئذٍ مصفوفة الانتقال :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

أما مقلوبها :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

لنحدد المساقط P_1 و P_2 :

$$P_1 = X_1 \, Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$P_2 = X_2 \, Y_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

وبالتالي نحصل على تحليل طيفي للمصفوفة f(A) بالصورة العامة هو :

$$f(A) = f(5)\,P_1 + f(-1)\,P_2$$

ومنه بأخذ f(A) = A نجد:

$$A = 5P_1 - P_2$$

$$A = 5\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

بأخذ $f(A) = A^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}P_1 - P_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

1-7-2- تحديد المساقط بطريقة لاغرانج في الاستيفاء:

بفرض لدينا كثيرة حدود $P_N(x)$ من الدرجة N تعطى بالصورة :

$$P_N(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_N x^N$$

بحيث تحقق $P_N(x_i) = f(x_i)$ حيث f تابع ما، وذلك من أجل قيم مختلفة للمتحول x هي:

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_p, \dots, x_N$$

إن كثيرة الحدود السابقة تسمى كثيرة حدود استيفائية للتابع f(x) وتكتب بالشكل :

$$P_N(x) = \sum_{i=0}^{N} L_i(x).f(x_i)$$

حيث :

$$L_i(x) = \prod_{j=0}^{N} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\ ;\ i \neq j$$

وبالتالي نكتب :

$$f(x) = P_N(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_N)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)...(x_0-x_N)} f(x_0) +$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)...(x-x_N)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)...(x_1-x_N)} f(x_1) + ...$$

$$.... + \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{N-1})}{(x_N-x_0)(x_N-x_1)...(x_N-x_{N-1})} f(x_N)$$

أي يمكن أن نكتب :

$$f(A) = \frac{(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I)...(A-\lambda_N I)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)...(\lambda_1-\lambda_N)} f(\lambda_1) +$$

$$+ \frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_3 I)...(A-\lambda_N I)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)...(\lambda_2-\lambda_N)} f(\lambda_2) + ...$$

$$.... + \frac{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)...(A-\lambda_{N-1} I)}{(\lambda_N-\lambda_1)....(\lambda_N-\lambda_{N-1})} f(\lambda_N)$$

ومنه فإن المساقط تعطى بالصورة : [5]

$$P_K = \prod_{\substack{S=1 \\ S\neq K}}^{N} \frac{A-\lambda_S I}{\lambda_K-\lambda_S} \quad ; \quad K = 1, 2, ..., N$$

مثال (2-1) :

كما رأينا سابقاً للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ القيم الذاتية $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$ وبالتالي فإن :

$$P_1 = \frac{A-\lambda_2 I}{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{1}{5+1}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]$$

$$P_1 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \frac{A-\lambda_1 I}{\lambda_2-\lambda_1} = \frac{1}{-1-5}\left[\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}\right] = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 4 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

3-7-1- إنشاء المساقط بمساعدة اتحاد المصفوفات :

لنأخذ التابع $f(z) = \frac{1}{\lambda - z}$ عندئذٍ:

$$f(A) = \frac{1}{\lambda I - A}$$

وبالتالي فإن : [5]

$$\frac{1}{\lambda I - A} = (\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda - \alpha_1}P_1 + \frac{1}{\lambda - \alpha_2}P_2 + \ldots + \frac{1}{\lambda - \alpha_m}P_m$$

حيث نلاحظ أن :

$$P_K = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_K}(Iz - A)^{-1}dz \quad ; \quad K = 1, 2, \ldots, N$$

وإن :

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_N = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(Iz - A)^{-1}dz = I$$

حيث Γ_K منحني أملس بسيط مغلق يضم النقطة λ_K أما Γ فهو منحني أملس بسيط مغلق يضم المنحنيات الملساء Γ_K المنفصلة عن بعضها البعض مثنى مثنى . ($K = 1, 2, \ldots, N$).

لنعين التابع $(\lambda I - A)^{-1}$ من أجل ذلك لنضع :

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{B(\lambda)}{\varphi(\lambda)}$$

حيث $B(\lambda) = \lambda I - \Gamma(A)$ و $\Gamma(A)$ المصفوفة المساعدة أما :

$$\varphi(\lambda) = |\lambda I - A|$$

ومنه يمكن تعيين المساقط من العلاقة :

$$P_K = \underset{\lambda=\lambda_K}{\text{res}} \frac{B(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \frac{B(\lambda_K)}{\varphi'(\lambda_K)} \; ; K = 1, 2, \ldots, N$$

حيث λ_K أقطاب بسيطة بالنسبة للدالة $(\lambda I - A)^{-1}$; $K = 1, 2, \ldots, N$

مثال (3-1) :

بالعودة للمثال السابق $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ إن القيم الذاتية لهذه المصفوفة :

$$\lambda_1 = 5 \, , \, \lambda_2 = -1$$

$$\varphi(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - 5)(\lambda + 1) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B(\lambda) = \lambda I - \Gamma(A) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ 4 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \frac{B(\lambda_1)}{\varphi'(\lambda_1)} = \frac{1}{2\lambda - 4}\bigg|_{\lambda_1=5} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \frac{B(\lambda_2)}{\varphi'(\lambda_2)} = \frac{1}{2\lambda - 4}\bigg|_{\lambda_2=-1} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

1-7-4- دراسة جملة معادلات تفاضلية خطية :

لنقم الآن بدراسة الجملة :

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)\, X(t) \qquad (3\text{-}1)$$

من أجل ذلك نفرض :

$$V(X,t) = X^{*}C(t)\,X$$

حيث X^{*} مرافق منقول X و $C(t)$ مصفوفة تابع ليابونوف.

وبالتالي فإن :

$$V^{\bullet}(X,t) = X^{\bullet *}C(t)X + X^{*}\frac{dC(t)}{dt}X + X^{*}C(t)X^{\bullet}$$

$$V^{\bullet}(X,t) = X^{*}A^{*}C(t)X + X^{*}\frac{dC(t)}{dt}X + X^{*}C(t)AX$$

$$V^{\bullet}(X,t) = X^{*}\left[A^{*}C(t) + \frac{dC(t)}{dt} + C(t)A\right]X$$

لنعتبر: $V^{\bullet}(X,t) = -W(X,t)$ ، حيث : $W(X,t) = +X^{*}B(t)X$

عندها: $V^{\bullet}(X,t) = -X^{*}B(t)X$

$$\Rightarrow X^{*}\left[A^{*}C(t) + \frac{dC(t)}{dt} + C(t)A\right]X = -X^{*}B(t)X$$

$$\Rightarrow A^{*}C(t) + \frac{dC(t)}{dt} + C(t)A = -B(t) \qquad (4\text{-}1)$$

لنوجد أولاً حل المعادلة المتجانسة :

$$\frac{dC(t)}{dt} + A^{*}C(t) + C(t)A = 0$$

لنضرب الطرفين من اليسار بـ $e^{\int_0^t A^{*}(t)dt}$ ومن اليمين بـ $e^{\int_0^t A(t)dt}$ نجد أن:

$$e^{\int_0^t A^{*}(t)dt}\left[A^{*}(t)C(t) + \frac{dC(t)}{dt} + C(t)A(t)\right]e^{\int_0^t A(t)dt} = 0$$

$$\Rightarrow e^{\int_0^t A^{*}(t)dt}A^{*}(t)C(t)e^{\int_0^t A(t)dt} + e^{\int_0^t A^{*}(t)dt}\frac{dC(t)}{dt}e^{\int_0^t A(t)dt} +$$

$$+ e^{\int_0^t A^{*}(t)dt}C(t)A(t)e^{\int_0^t A(t)dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{\int_0^t A^*(t)dt}\right)C(t)e^{\int_0^t A(t)dt} + e^{\int_0^t A^*(t)dt}\frac{dC(t)}{dt}e^{\int_0^t A(t)dt} +$$

$$+ e^{\int_0^t A^*(t)dt}C(t)\frac{d}{dt}\left(e^{\int_0^t A^*(t)dt}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[e^{\int_0^t A^*(t)dt}C(t)e^{\int_0^t A(t)dt}\right] = 0 \quad \Rightarrow e^{\int_0^t A^*(t)dt}C(t)e^{\int_0^t A(t)dt} = C(0)$$

حيث $C(0)$ تعطى بالعلاقة (من المرجع [5]) :

$$C(0) = \sum_{K,S=1}^{N} C_{KS} \;\; ; \;\; C_{KS} = P_K^* C(0) P_S \;\; ; \;\; K,S = 1, 2, \ldots, N$$

$$\Rightarrow C(t) = e^{-\int_0^t A^*(t)dt}C(0)e^{-\int_0^t A(t)dt}$$

من أجل حل المعادلة غير المتجانسة نعتبر $C(0)$ تابعة لـ t ونشتق:

$$\frac{dC(t)}{dt} = -A^*(t)e^{\int_0^t A^*(t)dt}C(0)e^{-\int_0^t A(t)dt} +$$

$$+e^{-\int_0^t A^*(t)dt}\frac{dC(0)}{dt}e^{-\int_0^t A(t)dt} - e^{-\int_0^t A^*(t)dt}C(0)A(t)e^{-\int_0^t A(t)dt}$$

نعوض في المعادلة غير المتجانسة (1-4) مع الاستفادة من الحل العام للمتجانسة نجد أن :

$$e^{-\int_0^t A^*(t)dt}\frac{dC(0)}{dt}e^{-\int_0^t A(t)dt} = -B(t) \quad \Rightarrow \frac{dC(0)}{dt} = -e^{-\int_0^t A^*(t)dt}B(t)e^{-\int_0^t A(t)dt}$$

بالتبديل نجد :

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\int_0^t A^*(t)dt}C(t)e^{\int_0^t A(t)dt}\right] = -e^{\int_0^t A^*(t)dt}B(t)e^{\int_0^t A(t)dt}$$

$$\Rightarrow \int_{S}^{+\infty} \frac{d}{dt}\left[e^{\int_0^t A^*(t)dt} C(t)\, e^{\int_0^t A(t)dt} \right] dt = -\int_{S}^{+\infty} e^{\int_0^t A^*(t)dt} B(t) e^{\int_0^t A(t)dt} dt$$

$$\Rightarrow -e^{\int_0^t A^*(t)dt} C(s) e^{\int_0^S A(t)dt} = -\int_{S}^{+\infty} e^{\int_0^t A^*(t)dt} B(t) e^{\int_0^t A(t)dt} dt$$

$$\Rightarrow C(S) = \int_{S}^{+\infty} e^{\int_S^t A^*(t)dt} B(t) e^{\int_S^t A(t)dt} dt$$

بتبديل كل t بـ S وكل S بـ t نجد :

$$\Rightarrow C(t) = \int_{t}^{+\infty} e^{\int_t^S A^*(t)dt} B(S) e^{\int_t^S A(t)dt} dS$$

لنفرض: $S = w + t$: $\Leftarrow$ $dS = dw\ ,\ w = S - t\ \ \&\ \ S \longrightarrow +\infty \Rightarrow w \longrightarrow +\infty$

نعوض فنجد :

$$C(t) = \int_{0}^{+\infty} e^{\int_0^w A^*(t)dt} B(w+t) e^{\int_0^w A(t)dt} dw \qquad (5\text{-}1)$$

من أجل الجملة $\frac{dX}{dt} = A.X(t)$ أي من أجل $A(t) = A$ حيث $A = Const$ يكون $C(t) = C$

و$B(t) = B$ ، حيث : $C = Const \quad ; \quad B = Const$

وأيضاً : $V(x,t) = V(x)$

وبذلك يكون :

$$C = \int_{0}^{+\infty} e^{A^* S} B\, e^{AS} dS \qquad (6\text{-}1)$$

باستخدام القيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ يمكن كتابة العلاقة (6-1) بالصورة : حسب المرجع [5]

$$C = -\sum_{K,S=1}^{N} \frac{1}{\lambda_K^* + \lambda_S} P_K^* B P_S \qquad (7\text{-}1)$$

حيث λ_K^* مرافق λ_K و P_K^* منقول مرافق P_K.

مثال (4-1) :

بفرض لدينا الجملة $\frac{dX(t)}{dt} = A.X(t)$ حيث $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ و $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$

إن القيم الذاتية الموافقة للمصفوفة A تعطى بالصورة :

$$\lambda_1 = -1 \quad , \quad \lambda_2 = -2$$

والأشعة (المتجهات) الذاتية الموافقة:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}(1 - 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}(-1 \;\; 2) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

لنوجد المصفوفة C :

$$C = -\sum_{K,S=1}^{m} \frac{1}{\lambda_K^* + \lambda_S} P_K^* B P_S$$

$$C = -\frac{1}{\lambda_1^* + \lambda_1} P_1^* B P_1 - \frac{1}{\lambda_2^* + \lambda_2} P_2^* B P_2 - \frac{1}{\lambda_1^* + \lambda_2} P_1^* B P_2 - \frac{1}{\lambda_2^* + \lambda_1} P_2^* B P_1$$

من أجل السهولة نختار $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ومنه:

$$W(X) = X^* B X = x_1^2 + x_2^2$$

بالتالي نحصل على C :

$$C=\begin{pmatrix}1 & -0,5\\ -0,5 & 0,5\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V(X)=X^{*}CX=(x_1\ \ x_2)\begin{pmatrix}1 & -0,5\\ -0,5 & 0,5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$=x_1^2-x_1x_2+0,5x_2^2=\left(x_1-\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{1}{4}x_2^2$$

ومنه حكماً يكون :

$$\frac{dV(x)}{dt}=-W(x)$$

لدينا :

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad ;\quad C=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

نوجد القيم الذاتية للمصفوفة B :

$$|\lambda I-B|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0\\ 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda_1=1$$

مكرر مرتين .

إن القيم الذاتية للمصفوفة C :

$$|\lambda I-C|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}\lambda-1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=0$$

$$(\lambda-1)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}=0$$

$$\lambda^2-\frac{3}{2}\lambda+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=0$$

$$\lambda^2-\frac{3}{2}\lambda+\frac{1}{4}=0$$

$$\Delta = \frac{9}{4} - 4(1)\left(+\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} \quad ; \quad \sqrt{\Delta} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \quad ; \quad \lambda_2 = \frac{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{5}+3}{4}$$

لدينا : $W(x) = \| x \|^2$ باختيار $\| x \|^2 = x_1^2 + x_2^2$

وإن :

$$\lambda_1 \| x \|^2 \le V(x) \le \lambda_2 \| x \|^2 \qquad (8\text{-}1)$$

بما أن $W(x)$ و$V(x)$ دالتين موجبتين تماماً توجد ثابتة γ بحيث $\gamma > 0$ وتحقق:

$$\gamma V(x) \le W(x) \Rightarrow \gamma V(x) \le \| x \|^2 \Rightarrow \gamma V(x_0) \le \| x_0 \|^2 \Rightarrow \gamma \le \frac{\| x_0 \|^2}{V(x_0)}$$

كما أنه من (8-1) :

$$V(x) \ge \lambda_1 \| x \|^2$$

$$V(x_0) \ge \lambda_1 \| x_0 \|^2 \Rightarrow \frac{1}{V(x_0)} \le \frac{1}{\lambda_1 \| x_0 \|^2}$$

$$\Rightarrow \gamma \le \frac{\| x_0 \|^2}{\lambda_1 \| x_0 \|^2} \Rightarrow \gamma \le \frac{1}{\lambda_1} \Rightarrow \gamma \le \frac{4}{3-\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow 0 < \gamma \le \frac{4}{3-\sqrt{5}}$$

من جهةٍ ثانية :

$$\gamma V(x) \le W(x)$$

$$\gamma V(x) \le -\frac{dV(x)}{dt}$$

$$\Rightarrow -\gamma V(x) \ge \frac{dV(x)}{dt} \Rightarrow \frac{dV(x)}{V(x)} \le -\gamma\, dt$$

$$\Rightarrow \ell og\, V(x) \le -\gamma t + \ell og(V(x_0))$$

$$\Rightarrow V(x) \le V(x_0)e^{-\gamma t}$$

لكن :

$$\lambda_1 \| x \|^2 \le V(x) \Rightarrow \| x \|^2 \le \frac{1}{\lambda_1} V(x)$$

$$\| x \|^2 \le \frac{1}{\lambda_1} V(x) \le \frac{V(x_0)}{\lambda_1} e^{-\gamma t}$$

وأيضاً :

$$V(x) \le \lambda_2 \| x \|^2$$

$$V(x_0) \le \lambda_2 \| x_0 \|^2$$

$$\Rightarrow \| x \|^2 \le \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{-\gamma t} . \| x_0 \|^2$$

$$\Rightarrow \| x \|^2 \le \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \| x_0 \|^2 e^{-\gamma t} \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \| x(t) \|^2 = 0$$

حيث : $0 < \gamma \le \dfrac{4}{3-\sqrt{5}}$

وهو الشرط اللازم تحققه لاستقرار الجملة المعطاة .

مثال (1-5) :

بفرض لدينا الجملة :

$$\frac{dX(t)}{dt} = A.X \quad ; X(0) = X_0 \qquad (9-1)$$

حيث $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ و $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

لندرس شروط الاستقرار لهذه الجملة وللسهولة سنختار تابع ليابونوف $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ أي
$C = I$ حيث I المصفوفة الواحدية من سعة A وأن :

$$V(x) = X^{*}\, C\, X$$

لنوجد الشروط الواجب تحققها للاستقرار :

لدينا: $$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\frac{dV(x)}{dt} = 2x_1 \frac{dx_1}{dt} + 2x_2 \frac{dx_2}{dt}$$

لكن لدينا:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 \quad , \quad \frac{dx_2}{dt} = a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2$$

نعوض :

$$\frac{dV(x)}{dt} = 2x_1(a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2) + 2x_2(a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2)$$
$$= 2a_{11}\, x_1^2 + 2a_{12}\, x_1\, x_2 + 2a_{21}\, x_2\, x_1 + 2a_{22}\, x_2^2$$

لكن باعتبار أن العناصر القطرية يجب أن تكون سالبة نكتب:

$$\frac{dV(x)}{dt} = -2|\, a_{11}\,|x_1^2 + 2\,a_{12}\, x_1\, x_2 + 2\,a_{21}\, x_2\, x_1 - 2|\, a_{22}\,|x_2^2$$

لكن نعلم أن :

$$(x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

$$x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 \geq 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1 x_2$$

$$\Rightarrow \frac{dV(x)}{dt} \leq -2|\, a_{11}\,|x_1^2 - 2|\, a_{22}\,|x_2^2 + a_{12}(x_1^2 + x_2^2) + a_{21}(x_1^2 + x_2^2) =$$

$$= -\left[2|\, a_{11}\,| - (a_{12} + a_{21})\right] x_1^2 - \left[\, 2|\, a_{22}\,| - (a_{12} + a_{21})\,\right]\, x_2^2$$

فحتى يكون $\frac{dV(x)}{dt}$ دوماً سالب يجب تحقق :

$$2|a_{11}|-(a_{12}+a_{21})>0 \qquad 2|a_{11}|>a_{12}+a_{21}$$

$$\Rightarrow \qquad (10\text{-}1)$$

$$2|a_{22}|-(a_{12}+a_{21})>0 \qquad 2|a_{22}|>a_{12}+a_{21}$$

بتحقق الشروط (10-1) نضمن أن $V(x)$ موجب تماماً و $\frac{dV(x)}{dt}$ سالب في كل الحالات الموافقة لـ $X(t)$ عدا نقطة الأصل وهذا يعني أن :

$$\lim_{t\to+\infty}\|X(t,t_0,x_0)\|=0$$

وبالتالي يتقارب الحل $X(t, t_0, x_0)$ من أجل أي شرط ابتدائي (t_0, x_0) .

ومنه يمكن إيجاد عدد موجب محدود $\varepsilon>0$ بحيث يحقق :

$$2|a_{11}|-(a_{12}+a_{21})>\varepsilon$$
$$2|a_{22}|-(a_{12}+a_{21})>\varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{dV(x)}{dt}\le -\left[2|a_{11}|-(a_{12}+a_{21})\right]x_1^2-\left[2|a_{22}|-(a_{12}+a_{21})\right]x_2^2$$

$$\Rightarrow \frac{dV(x)}{dt}\le -\varepsilon x_1^2-\varepsilon x_2^2=-\varepsilon(x_1^2+x_2^2)$$

$$\Rightarrow \frac{dV(x)}{dt}\le -\varepsilon V(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dV(x)}{V(x)}\le -\varepsilon\, dt \Rightarrow \int_{V_0}^{V_t}\frac{dV(x)}{V(x)}\le -\varepsilon\int_0^t dt \quad ; \; V_0=V(x(0))$$

$$\Rightarrow \left[\ell og\, V(x)\right]_{V_0}^{V_t}\le -\varepsilon(t)$$

$$\Rightarrow \ell og\, V_t-\ell og\, V_0\le -\varepsilon(t)$$

$$\Rightarrow \ell og\,\frac{V_t}{V_0}\le -\varepsilon(t)$$

$$\Rightarrow \frac{V_t}{V_0}\le e^{-\varepsilon(t)}\Rightarrow V_t\le V_0\,e^{-\varepsilon t} \;\; ; \; t\ge 0 \; ; \; V_t=V(X(t))$$

تنويه :

$$V_0 = V(0) \quad ; \quad V_t = V(t)$$

لكن :

$$\| x(t) \|^2 = V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\| x(0) \|^2 = V\big(x(0) \big) = x_{01}^2 + x_{02}^2$$

$$\Rightarrow \| x(t) \|^2 \le \| x(0) \|^2 e^{-\varepsilon(t)} \; ; \; t \ge 0 \qquad (11\text{-}1)$$

إذاً إذا تحقق الشرط (11-1) تكون الجملة (9-1) مستقرة .

8-1- دراسة جملة معادلات تفاضلية ذات معاملات متحولة :

بفرض لدينا جملة المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتحولة من الشكل :

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)\,X(t) \qquad (3\text{-}1)$$

حيث $t \in (-\infty, +\infty)$ و$A(t)$ مصفوفة الأمثال المتحولة عندئذٍ إن مصفوفة الحل الأساسية $N(t,\tau)$ تعطى بالصورة حسب المرجع [5] :

$$N(t, \tau) = N(t).\; N^{-1}(\tau) \qquad (12\text{-}1)$$

بحيث يكون : $N(0) = I$

لتكن $T(t)$ مصفوفة الانتقال الموافقة للمصفوفة $A(t)$ وهي عبارة عن مصفوفة أعمدتها الأشعة (المتجهات) الذاتية الموافقة لـ $A(t)$ وهي $X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t)$ عندئذٍ يتحقق لدينا :

$$X_K(t) = N(t)X_K \; ; \; X_K(0) = X_K \quad ; \quad K = 1, 2, \dots, N$$

وبالتالي يكون :

$$T(t) = \big(X_1(t) \;\; X_2(t) \dots X_N(t) \big) = N(t).\, T$$

حيث : $T = (X_1 \; X_2 \dots X_N)$

وأيضاً يكون :

$$T^{-1}(t)=T^{-1}N^{-1}(t) \;\; ; \;\; T^{-1}(t)=\begin{pmatrix} Y_1(t) \\ \vdots \\ Y_N(t) \end{pmatrix}$$

حيث $Y_K(t)$ هي السطر رقم K في المصفوفة $T^{-1}(t)$ حيث $K = 1, 2, \ldots, N$ عندئذٍ يكون :

$$Y_K(t)=Y_K\,N^{-1}(t) \;\; ; \;\; T^{-1}=\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_N \end{pmatrix} \; ; K=1,2,\ldots,N$$

$$Y_K(0) = Y_K \quad ; \quad K = 1, 2, \ldots, N$$

لنقوم الآن بتعيين المساقط $P_K(t)$ ولنضع :

$$P_K(t)=X_K(t)\,Y_K(t)=N(t)\,X_K\,Y_K\,N^{-1}(t)=N(t)\,P_K\,N^{-1}(t)$$

ولنضع :

$$P_K(t).P_S(t)=\delta_{KS}\,P_K(t)$$

حيث :

$$\delta_{KS}=\begin{cases} 0 & ; \quad K\neq S \\ 1 & ; \quad K=S \end{cases} \quad ; \quad K\,,\,S = 1, 2, \ldots, N$$

ويتحقق أيضاً :

$$P_1(t) + P_2(t) + \ldots + P_N(t) = I$$

خلاصة :

لتعيين المساقط $P_K(t)$ من أجل تحليل طيف المصفوفة $A(t)$ نقوم بالخطوات التالية :

1- نوجد مصفوفة الانتقال $T(t)$ الموافقة للمصفوفة $A(t)$.

2- نوجد $T^{-1}(t)$.

3- نحسب المساقط $P_K(t)$ حيث $K = 1, 2, \ldots, N$ بالصورة :

$$P_K(t) = X_K(t)\,Y_K(t)$$

حيث $X_K(t)$ العمود رقم K في المصفوفة $T(t)$

و$Y_K(t)$ السطر رقم K في المصفوفة $T^{-1}(t)$

$$K = 1, 2, \ldots, N$$

ملاحظة (13-1):

يمكن تعيين مصفوفة الحل الأساسية من العلاقة :

$$N(t,\tau) = N(t)\,N^{-1}(\tau)$$

حيث :

$$X_K(t) = N(t)\,X_K \quad ; \quad X_K = X_K(0)$$

$$Y_K(t) = Y_K\,N^{-1}(t) \;;\; Y_K = Y_K(0)$$

$$K = 1, 2, \ldots, N$$

مثال (6-1) :

لنأخذ الجملة: $\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t)$ حيث : $A(t) = \begin{pmatrix} -1 & -t \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

ولنوجد حل هذه الجملة من أجل ذلك لدينا:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 - t\,x_2 \qquad (13\text{-}1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2 \qquad (14\text{-}1)$$

من (14-1) :

$$\frac{dx_2}{x_2} = -2dt \Rightarrow x_2 = C_1 e^{-2t}$$

نعوض في (13-1) :

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 - t\,C_1 e^{-2t} \Rightarrow \frac{dx_1}{dt} + x_1 = -t\,C_1 e^{-2t}$$

لنحل المتجانسة منها:

$$\frac{dx_1}{dt} + x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = A\,e^{-t}$$

نعتبر A تابع لـ t ونشتق :

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dA}{dt}e^{-t} - A\,e^{-t}$$

نعوض في غير المتجانسة :

$$\frac{dA}{dt}e^{-t} - A\,e^{-t} + A\,e^{-t} = -t\,C_1\,e^{-2t}$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = -t\,C_1\,e^{-t} \Rightarrow A = C_1\int t\,e^{-t}dt + C_2$$

بالمكاملة نحصل على :

$$A = -C_1\left[\,t\,e^{-t} + e^{-t}\,\right] + C_2$$

$$\Rightarrow x_1 = -C_1(t+1)\,e^{-2t} + C_2\,e^{-t}$$

إذاً الحل العام للجملة :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = C_1\begin{bmatrix} -(t+1)\,e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

لنوجد القيم الذاتية الموافقة للمصفوفة A(t) وهي:

$$\lambda_1 = -1\ ,\ \lambda_2 = -2$$

أما المتجهات الذاتية الموافقة للقيم فهي:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ v_2 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

ومنه مصفوفة الانتقال :

$$T(t)=\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

ومنه فإن $T^{-1}(t)$ تعطى بالصورة :

$$T^{-1}(t)=\begin{pmatrix}1 & -t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

لدينا الآن:

$$x_1(t)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\ ,\ x_2(t)=\begin{pmatrix}t\\ 1\end{pmatrix}$$

$$Y_1(t)=(1 \quad -t)\ ,\ Y_2(t)=(0 \quad 1)$$

$$Y_1(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\ ,\ X_2(0)=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$Y_1(0)=(1 \quad 0)\ ,\ Y_2(0)=(0 \quad 1)$$

المساقط هي :

$$P_1(t)=X_1(t)\,Y_1(t)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}(1 \quad -t)=\begin{pmatrix}1 & -t\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$P_2(t)=X_2(t)\,Y_2(t)=\begin{pmatrix}t\\ 0\end{pmatrix}(0 \quad 1)=\begin{pmatrix}0 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

لنقوم الآن بتعيين $N(t)$:

$$X_K(t) = N(t)\, X_K \ ;\ K = 1, 2$$

$$X_1(t) = N(t)\, X_1 \qquad (15\text{-}1)$$

$$X_2(t) = N(t)\, X_2 \qquad (16\text{-}1)$$

نفرض:

$$N(t)=\begin{pmatrix}T_1 & T_2\\ T_3 & T_4\end{pmatrix}$$

نعوض:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T_1 & T_2\\T_3 & T_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T_1\\T_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T_1 & T_2\\T_3 & T_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T_2\\T_4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow N(t)=\begin{pmatrix}1 & t\\0 & 1\end{pmatrix}$$

وعندئذٍ تكون :

$$N^{-1}(t)=\begin{pmatrix}1 & -t\\0 & 1\end{pmatrix}$$

ومنه مصفوفة الحل الأساسية تعطى بالصورة :

$$N(t,\tau)=N(t).N^{-1}(\tau)=\begin{pmatrix}1 & t\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\tau\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & t-\tau\\0 & 1\end{pmatrix}$$

1-9- إيجاد تابع ليابونوف عند دراسة استقرار الحل لجملة معادلات ذات معاملات متحولة :

لنأخذ الجملة :

$$\frac{dX(t)}{dt}=A(t)\,X(t) \quad ; \quad X(t_0)=X(0) \qquad (17\text{-}1)$$

لنفرض أن دالة ليابونوف تعطى بالصورة :

$$V(x,t)=X^{*}C(t)\,X$$

وبالتالي توجد دالة $W(x,t)$ تحقق:

$$W(x,t) = X^* B(t) X$$

بحيث يكون :

$$\frac{dV(x,t)}{dt} = -W(x,t)$$

إن المصفوفة B(t) يمكن تعيينها من المعادلة (1-18) :

$$B(t) = P_1^*(t).B(t).P_1(t) + P_2^*(t)B(t)P_2(t) \; ; \; t \in (-\infty, \infty) \qquad (1\text{-}18)$$

بحسب العلاقة (1-4) لدينا :

$$\frac{dC(t)}{dt} + C(t)A(t) + A^*(t)C(t) = -B(t)$$

والتي نحصل منها على C(t) .

تعطى أيضاً C(t) بالشكل : [5]

$$C(t) = \int_t^{+\infty} N^{*-1}(t)P_1^*(0)N^*(\tau)B(\tau)N(\tau)P_1(0)N^{-1}(t)d\tau$$
$$- \int_{-\infty}^{t} N^{*-1}(t)P_2^*(0)N^*(\tau)B(\tau)N(\tau)P_2(0)N^{-1}(t)\,d\tau \qquad (1\text{-}19)$$

مثال (1-7) :

بالعودة للمثال السابق والجملة (1-16) حيث $A(t) = \begin{pmatrix} -1 & -t \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

نقوم بتحديد B(t) كما يلي :

$$P_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$P_1^*(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 0 \end{pmatrix} \quad P_2^*(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

من أجل ذلك نفرض :

$$B(t) = \begin{pmatrix} K_1(t) & K_2(t) \\ K_3(t) & K_4(t) \end{pmatrix}$$

عندئذٍ وبحسب العلاقة (17-1) يكون :

$$\begin{pmatrix} K_1(t) & K_2(t) \\ K_3(t) & K_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1(t) & K_2(t) \\ K_3(t) & K_4(t) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1(t) & K_2(t) \\ K_3(t) & K_4(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} K_1(t) & K_2(t) \\ K_3(t) & K_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1(t) & -t\,K_1(t) \\ -t\,K_1(t) & 2t^2 K_1(t) + t\,K_2(t) + t\,K_3(t) + K_4(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_1(t) = K_1(t) \\ K_2(t) = -t\,K_1(t) \\ K_3(t) = -t\,K_1(t) \\ K_4(t) = 2t^2 K_1(t) + t\,K_3(t) + t\,K_2(t) + K_4(t) \end{cases}$$

منها نحصل على $K_1(t)$ و $K_4(t)$ اختياريين .

$$K_2(t) = -t\,K_1(t) \ , \ K_3(t) = -t\,K_1(t)$$

للسهولة نختار: $K_1(t) = 0 \ , \ K_4(t) = 1$

ومنه نحصل على:

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وبالتالي تكون:

$$W(x) = X^* B(t) X = x_2^2$$

الآن لنوجد $C(t)$ من العلاقة (2) حيث :

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & -t \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^*(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -t & -2 \end{pmatrix}$$

$$B(t)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad ; \quad C(t)=\begin{pmatrix}\alpha_1(t) & \alpha_2(t)\\ \alpha_3(t) & \alpha_4(t)\end{pmatrix}$$

بالتعويض نجد :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\alpha_1(t) & \alpha_2(t)\\ \alpha_3(t) & \alpha_4(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\alpha_1 & \alpha_1 t+3\alpha_2\\ t\alpha_1+3\alpha_3 & t\alpha_2+t\alpha_3+4\alpha_4-1\end{pmatrix}$$

ومنه نحصل على المعادلات التفاضلية:

$$\frac{d\alpha_1(t)}{dt}=2\alpha_1(t) \qquad (20\text{-}1)$$

$$\frac{d\alpha_2(t)}{dt}=\alpha_1 t+3\alpha_2 \qquad (21\text{-}1)$$

$$\frac{d\alpha_3(t)}{dt}=t\alpha_1+3\alpha_2 \qquad (22\text{-}1)$$

$$\frac{d\alpha_4(t)}{dt}=t\alpha_2+t\alpha_3+4\alpha_4-1 \qquad (23\text{-}1)$$

من (20-1) :

$$\frac{d\alpha_1}{dt}=2\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1=C_1 e^{2t}$$

نعوض في (21-1) :

$$\frac{d\alpha_2}{dt}=C_1 t e^{2t}+3\alpha_2 \Rightarrow \frac{d\alpha_2}{dt}-3\alpha_2=C_1 t e^{+2t}$$

نأخذ المتجانسة منها:

$$\frac{d\alpha_2}{dt}-3\alpha_2=0 \Rightarrow \alpha_2=A_1 e^{3t}$$

نشتق بالنسبة لـ t بعد اعتبار A_1 كتابع لـ t :

$$\Rightarrow \frac{d\alpha_2}{dt}=\frac{dA_1}{dt}e^{3t}+3A_1 e^{3t}$$

نعوض في غير المتجانسة نحصل على:

$$\frac{dA_1}{dt} = C_1 t e^{-t}$$

$$\Rightarrow A_1 = -t C_1 e^{-t} - C_1 e^{-t} + C_1 C_2$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = -t C_1 e^{2t} - C_1 e^{2t} + C_1 C_2 e^{3t}$$

نعوض في (1-22) :

$$\frac{d\alpha_3}{dt} - 3\alpha_3 = t C_1 e^{2t}$$

نحل المتجانسة منها:

$$\frac{d\alpha_3}{dt} - 3\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = A_2 e^{3t}$$

نشتق بالنسبة لـ t بعد اعتبار A_2 كتابع لـ t :

$$\frac{d\alpha_3}{dt} = \frac{dA_2}{dt} e^{3t} + 3A_2 e^{3t}$$

نعوض في غير المتجانسة نحصل على :

$$\frac{dA_2}{dt} = C_1 t e^{-t} \Rightarrow A_2 = -C_1 t e^{-t} - C_1 e^{-t} + C_3 C_1$$

$$\Rightarrow \alpha_3 = -t C_1 e^{2t} - C_1 e^{2t} + C_1 C_3 e^{3t}$$

نعوض في (1-23):

$$\frac{d\alpha_4}{dt} = -2t^2 C_1 e^{2t} - 2C_1 t e^{2t} + C_1 C_2 t e^{3t} + C_1 C_2 t e^{3t} + 4\alpha_4 - 1$$

نحل المتجانسة منها:

$$\frac{d\alpha_4}{dt} = 4\alpha_4 \Rightarrow \alpha_4 = A_3 e^{4t}$$

نشتق بالنسبة لـ t بعد اعتبار بعد اعتبار A_3 كتابع لـ t :

$$\frac{d\alpha_4}{dt} = \frac{dA_3}{dt} e^{4t} + 4A_3 e^{4t}$$

نعوض في غير المتجانسة نحصل على:

$$\frac{dA_3}{dt} = -2t^2 C_1 e^{2t} - 2t C_1 e^{-2t} - e^{-4t} + C_1(C_3 + C_2) t e^{-t}$$

$$\Rightarrow A_3 = C_1 t^2 e^{-2t} + C_1 t e^{-2t} + \frac{1}{2} C_1 e^{-2t} + C_1 t e^{-2t}$$

$$+ \frac{1}{2} C_1 e^{-2t} + \frac{1}{4} e^{-4t} + (C_1 C_3 + C_1 C_2)(-t e^{-t} - e^{-t}) + C_4$$

$$\Rightarrow \alpha_4 = C_1 t^2 e^{2t} + 2C_1 t e^{2t} + C_1 e^{2t} - t\, C_1 C_3 e^{3t} - C_1 C_3 e^{3t}$$

$$-t\, C_1 C_2 e^{3t} - C_1 C_2 e^{3t} + \frac{1}{4} + C_4 e^{4t}$$

للسهولة نأخذ :

$$C_1 = 1 \;\; ; \;\; C_2 = C_3 = C_4 = 0$$

نحصل على :

$$\alpha_1 = e^{2t}$$

$$\alpha_2 = -t e^{2t} - e^{2t}$$

$$\alpha_3 = -t e^{2t} - e^{2t}$$

$$\alpha_4 = t^2 e^{2t} + 2t e^{2t} + e^{2t} + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow C(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & -(t+1) e^{2t} \\ -(t+1) e^{2t} & (t+1)^2 e^{2t} + \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن تابع ليابونوف :

$$V(x,t) = X^* C(t) X = e^{2t} x_1^2 - 2(t+1) e^{2t} x_1 x_2 + \left[\frac{1}{4} + (t+1)^2 e^{2t}\right] x_2^2$$

$$\Rightarrow V(x,t) = e^{2t}\left[x_1^2 - 2(t+1)x_1 x_2 + (t+1)^2 x_2^2\right] + \frac{1}{4}x_2^2$$

$$\Rightarrow V(x,t) = e^{2t}\left[x_1 - (t+1)x_2\right]^2 + \frac{1}{4}x_2^2$$

من الواضح أن:

$$\frac{dV(x,t)}{dt} = -x_2^2$$

بما أن الدالتين $V(x,t)$ و $W(X,t)$ دالتين موجبتين تماماً نوجد ثابتة موجبة $\gamma(t_0) > 0$ بحيث تحقق المتراجحة دوماً :

$$\gamma(t_0)\, V(X,t) \le W(X,t)$$

لكن بفرض λ_1 وλ_2 القيمة الذاتية الصغرى والقيمة الذاتية العظمى على الترتيب للمصفوفة $B(t)$ عندئذٍ :

$$\lambda_1 \| x \|^2 \le W(X) \le \lambda_2 \| x \|^2$$

لنوجد القيم الذاتية للمصفوفة $B(t)$:

$$|\lambda I - B(t)| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

لدينا:

$$\Rightarrow W(x) = x_2^2 \;;\; \| x(t) \|^2 = x_1^2 + x_2^2$$

$$\Rightarrow 0 \le W(x) \le x_1^2 + x_2^2 = \| x(t) \|^2$$

ولنفرض أن $\delta_1(t)$ و$\delta_2(t)$ هي دوال القيم الذاتية الصغرى والعظمى على الترتيب للمصفوفة $C(t)$ ومنه يتحقق أن:

$$\delta_1(t)\| x(t) \|^2 \le V(X,t) \le \delta_2(t)\| x(t) \|^2 \; ; \; t \in (-\infty, +\infty) \qquad (24\text{-}1)$$

بما أن كل من $W(X,t)$ و$V(X,t)$ دوال موجبة تماماً نأخذ القيمة $0 < \gamma(t_0)$ بحيث تحقق :

$$\gamma(t_0)V(X,t) \le W(X,t) \le \| x(t) \|^2$$

$$\Rightarrow \gamma(t_0)V(X,t) \le \| x(t) \|^2$$

$$\gamma(t_0)V(X_0,t_0) \le \| x(0) \|^2 \Rightarrow \gamma(t_0) \le \frac{\| x(0) \|^2}{V(X_0,t_0)}$$

لكن من (24-1) لدينا :

$$V(X,t) \ge \delta_1(t)\| x(t) \|^2 \Rightarrow \; V(X_0,t_0) \ge \delta_1(t_0)\| x(0) \|^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{V(X_0,t_0)} \le \frac{1}{\delta_1(t_0)\| x(0) \|^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\| x(0) \|^2}{V(X_0,t_0)} \le \frac{1}{\delta_1(t_0)} \Rightarrow \gamma(t_0) \le \frac{1}{\delta_1(t_0)}$$

من جهة أخرى:

$$\gamma(t_0)V(X,t) \le W(X,t)$$

$$\gamma(t_0)V(X,t) \le -\frac{dV(x,t)}{dt}$$

$$\Rightarrow -\gamma(t_0)V(X,t) \ge \frac{dV(x,t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dV(x,t)}{V(x,t)} \le -\gamma(t_0)dt \Rightarrow \ell n\, V(x,t) \le -\gamma(t_0)t + \ell n\, V\left(x_0,t_0\right)$$

$$\Rightarrow V(x,t) \le V(x_0,t_0)e^{-\gamma(t_0)t}$$

لكن :

$$V(X,t) \ge \delta_1(t)\| x(t) \|^2$$

$$\Rightarrow \| x(t) \|^2 \le \frac{1}{\delta_1(t)} V(x,t)$$

$$\| x(t) \|^2 \le \frac{1}{\delta_1(t)} V(x_0,t_0) e^{-\gamma(t_0)t} \ ; \forall t \in (0,+\infty)$$

$$\Rightarrow \| x(t) \|^2 \le \frac{1}{\delta_1(t_0)} V(x_0,t_0) e^{-\gamma(t_0)t}$$

ولدينا:

$$V(X,t) \le \delta_2(t) \| x(t) \|^2 \ ; \ t \in (-\infty,+\infty)$$

$$V\left(X_0,t_0\right) \le \delta_2(t_0) \| x(0) \|^2$$

$$\| x(t) \|^2 \le \frac{1}{\delta_1(t_0)} V(x_0,t_0) e^{-\gamma(t_0)t} \le \frac{\delta_2(t_0)}{\delta_1(t_0)} \| x(0) \|^2 e^{-\gamma(t_0)t}$$

$$\Rightarrow \| x(t) \|^2 \le \frac{\delta_2(t_0)}{\delta_1(t_0)} . \| x(0) \|^2 e^{-\gamma(t_0)t} \qquad (25\text{-}1)$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \| x(t) \|^2 = 0$$

وبالتالي إذا تحقق الشرط (1-25) تكون الجملة (1-3) مستقرة.

وهي الشروط اللازم تحققها من أجل استقرار الجملة السابقة.

الفصل الثاني

دراسة استقرار حلول جمل المعادلات التفاضلية العشوائية

2-1- بعض الرموز والتعاريف الأساسية :

تعريف (2-1):

- ليكن الزوج (Ω,F) فضاء مقيس حيث Ω مجموعة ما وF هو جبر تام من المجموعات الجزئية من Ω .

- إذا كان s فضاء مترياً تاماً وفصولاً عندها فإن $S = B(s)$ هو جبر بوريل لـ s وهو أصغر جبر تام يحوي المجموعات المغلقة أو المفتوحة لـ (s) وإذا كان s فضاء باناخ الفصول أو هيلبرت سنرمز لنظيمه بـ $\|\bullet\|_s$ والى الفضاء الطبولوجي الثنوي له بـ s^* .

- القياس الاحتمالي على الفضاء المقيس (Ω,F) هو تابع جمعي تام أو جمعي ولنرمز له بالرمز P من F إلى $[0,1]$ والمحقق لـ $P(\Omega) = 1$ عندئذٍ ندعو (Ω,F,P) فضاء احتمالي.

وإذا وضعنا:

$$\bar{F} = \left\{ A \in \Omega \; ; \; \exists B, \mathbb{C} \in F \; ; \; B C A C \mathbb{C} \; ; \; P(B) = P(\mathbb{C}) \right\}$$

إن $\bar{F}$ هو جبر تام يدعى المتمم لـ F وإذا كان $F = \bar{F}$ عندئذٍ الفضاء الاحتمالي (Ω,F,P) يدعى تام.

تعريف (2-2):

ليكن (Ω,F,P) فضاء احتمالياً من أجل أي أسرة اختيارية $\{X_t\}_{t \geq 0}$ من المتغيرات العشوائية المعرفة على Ω تدعى $X(t,w)$ عملية عشوائية ونكتب : $X(t,w) = X(t) = X_t(w)$ وذلك $\forall t \geq 0$ و$w \in \Omega$ والتوابع $X(w)$ تدعى مسارات X.

تعريف (2-3):

يكون المتغير العشوائي X قابلاً للقياس إذا كان التطبيق:

$$X(\bullet,\bullet) : I \times \Omega \longrightarrow S$$

هو (مقيس $B(I) \times F$)، حيث I مجموعة أدلة.

تعريف (2-4):

لتكن $\{F_t\}_{t\in I}$ أسرة متزايدة من الجبور تكون العملية X متكيفة مع $\{F_t\}_{t\in I}$ إذا كان كل X_t قابل للقياس بالتوافق مع (F_t) أي بشكل متوافق مع F_t أو مع مراعاة F_t حيث $t\in I$.

تعريف (2-5):

ليكن ξ و Γ متغيرين عشوائيين فوق فضاء احتمالي (Ω, F, P) ولنفرض أن لهما توقعـان رياضيان هما $E\xi$ و $E\Gamma$ عندها نرمز بـ :

$$CoV(\xi,\Gamma) = E\left[(\xi - E\xi)(\Gamma - E\Gamma)\right]$$

وهو التباين المشترك للمتغيرين ξ و Γ .

تعريف (2-6):

بفرض لدينا ξ و Γ متغيرين عشوائيين لهما التشتتين :

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

$$D\Gamma = E\Gamma^2 - (E\Gamma)^2$$

نعرف معامل الارتباط بين ξ و Γ وهو $\rho_{\xi\Gamma}$:

$$\rho_{\xi\Gamma} = \begin{cases} \dfrac{CoV(\xi,\Gamma)}{\sqrt{D\xi . D\Gamma}} & ; \ D\xi > 0 \ , \ D\Gamma > 0 \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

تعريف (2-7):

ليكن ξ متغيراً عشوائياً فوق فضاء احتمالي (Ω,F,P) ولتكن g دالة حقيقية معرفة علـى $\Re$ وقيوسة بالنسبة لـ $\Re$ فإذا كان $E|g(\xi)| < +\infty$ فعندئذٍ :

1- من أجل أي $K \in N$ وأي $C \in \Re$ وبفرض أن:

$$g(\xi) = (\xi - C)^K$$

فإن $E(\xi - C)^K$ يسمى بالعزم حول C من المرتبة K للمتغير العشوائي ξ.

2- إذا كان $C = 0$ نسمي عندئذٍ $E(\xi)^K$ بالعزم الابتدائي من المرتبة K للمتغير العشوائي ξ.

تعريف (2-8):

ليكن ζ هو جبر تام جزئي اختياري من F و $E(\bullet \backslash \xi)$ هو التوقع الشرطي الموافق لـ ζ .

ولتكن $X = X_t$ حيث $t \in I$ عملية بالقيم – s معرفة على (Ω, F, P) ومتكيفة مع الأسرة $\{F_t\}_{t\in I}$
نسمي العملية السابقة عملية ماركوفية مع مراعاة $\{F_t\}_{t\in I}$ إذا حققت الخاصة التالية:

من أجل كل قيم t و s حيث $(s \le t \le T)$ يتحقق :

$$E\left(f(x_t) \backslash F_s\right) = E\left(f(x_t) \backslash X_s\right)$$

محققة تقريباً في كل مكان لأجل كل تابع بوريل ذي قيم حقيقية محدودة والمعرف على s.

تعريف (2-9):

ندعو العملية العشوائية بالقيم K بعملية وينيير -Q ونرمز لهـا بـالرمز w_t إذا تحققـت الشروط التالية:

1) $w_0 = 0$.

2) w_t لها مسارات مستمرة.

3) w_t لها تزايد مطرد.

4) $E(w_t) = 0$ و $CoV(w_t - w_s) = (t - s)\,Q$ من أجـل كـل قـيم $0 \le s \le t$ حيـث $CoV(x)$ تباين المتغير X.

تعريف (2-10) :

نقول عن الحل الصفري للمعادلة $dX_t = F(t, X_t)\,dt$ حيث $F(t,0) = 0$ و $t \ge 0$.

1- أنه مستقر إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \text{if} \; \| x_0 \|_H < \delta \Rightarrow \| x_t(x_0) \|_H < \varepsilon$$

وذلك $\forall t \ge 0$. حيث $\|\bullet\|_H$ النظيم في فضاء هيلبرت H .

2- أنه مستقر بشكل مقارب إذا كان الحل مستقراً وكان يوجد $\delta > 0$ بحيث :

$$\| (x_0) \|_H < \delta \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \| x_t(x_0) \|_H = 0$$

3- أنه مستقر أسياً إذا كان مستقراً بشكل مقارب وكان يوجد عددان $\alpha > 0$ و$0 < \beta$ بحيث $\| x_t(x_0) \|_H \leq \beta \| x_0 \|_H e^{-\alpha t}$ وذلك $\forall t \geq 0$.

تعريف (2-11):

نقول عن الحل الصفري للمعادلة :

$$X_t = X_0 + \int_0^t A(s, X_S)\, ds + \int_0^t B(s, X_S)\, dw_S$$

حيث $A(t,0) = B(t,0) = 0$ و $t \geq 0$

1- أنه مستقر بالاحتمال إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall \varepsilon, \varepsilon' > 0 \ ; \ \exists \delta(\varepsilon, \varepsilon') > 0 \ \text{ if } \| x_0 \|_H < \delta \Rightarrow$$

$$P\left\{ \| x_t(x_0) \|_H > \varepsilon' \right\} < \varepsilon \ ; \ \forall t \geq 0$$

(2) أنه مستقر بالعزوم MoMeNt (P – th) حيث P > 0 إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta(\varepsilon) > 0 \ \text{ if } \| x_0 \|_H < \delta \Rightarrow E \| x_t(x_0) \|_H^P < \varepsilon \ \ \forall t \geq 0$$

(3) أنه مستقر تقريباً بشكل أكيد إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \ \delta(\varepsilon) > 0 \ \text{ if } \| x_0 \|_H < \delta \Rightarrow P\left\{ \| x_t(x_0) \|_H < \varepsilon \ ; t \geq 0 \right\} = 1$$

(4) أنه مستقراً تقاربياً بالاحتمال إذا كان مستقراً بالاحتمال ويحقق:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \text{ if } \| x_0 \|_H < \delta \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} P\left\{ \| x_t(x_0) \| > \varepsilon \right\} = 0$$

(5) أنه مستقراً تقاربياً بالعزوم MoMeNt (P – th) حيث P > 0 إذا كان مستقراً بالعزوم MoMeNt P – th ويوجد $\delta > 0$ بحيث $\| x_0 \|_H < \delta \Leftarrow$

$$\lim_{t \to +\infty} E\left(\| x_t(x_0) \|_H^P \right) = 0$$

(6) أنه مستقراً تقاربياً بشكل أكيد إذا كان مستقراً بالاحتمال ويوجد $\delta > 0$ بحيث إذا كان $\| x_0 \|_H < \delta \Leftarrow$

$$P\left\{ \lim_{t \to +\infty} \| x_t(x_0) \|_H = 0 \right\} = 1$$

(7) أنه مستقراً أسياً بالعزوم MoMeNt (P – th) و $P > 0$ إذا وجدت الأعداد الموجبة $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ بحيث أن:

$$E\left(\| x_t(x_0) \|_H^P \right) \le \beta \| x_0 \|_H^P e^{-\alpha t}$$

وذلك $\forall t \ge 0$.

(8) أنه مستقراً أسياً بشكل أكيد إذا وجدت الأعداد الموجبة $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ بحيث:

$$P\left\{ \| x_t(x_0) \|_H \le \beta \| x_0 \|_H e^{-\alpha t} \right\} = 1$$

ملاحظة (2-1) :

تعتبر الطرق الأساسية في دراسة الاستقرار عبارة عن طريقتين:

1- طريقة تابع ليابونوف.

2- طريقة أس ليابونوف.

لكن طريقة تابع ليابونوف هي الأداة الأكثر فعالية بشكل ملائم للتعامل مع الاستقرار العشوائي للأنظمة وهذا التقارب المدعو أيضاً بطريقة ليابونوف الثانية (المباشرة) يعطينا أداة قوية لدراسة خصائص استقرار الأنظمة العشوائية الديناميكية لأن التقنية لا تتطلب من المرء أن يحل بوضوح معادلة النظام.

تعريف (2-12):

بفرض لدينا المعادلة : $dX_t = f(X_t)\, dt$

حيث :

$$X_0 = x_0 \in D_m C \Re^N \ ; \ f(0) = 0$$

$$D_m = \left\{ x \in \Re^N ; V(x) < m \right\}$$

محدودة .

نسمي $V(x)$ تابع ليابونوف الموافق للمعادلة المذكورة أعلاه إذا كان يحقق الشرط التالي:

بفرض $V'(x)$ المشتق الإجمالي لـ $V(x)$ على كافة المسارات $X_t(x_0)$ يعطى بالصورة :

$$V'(x) = \frac{dV(x)}{dt} = f^T(x).\frac{\partial V(x)}{\partial X} = -K(x)$$

بحيث $- K(x) \leq 0$ وذلك $\forall x \in D_m$ وحيث $K(x)$ مستمر و $f^T(x)$ المنقول لـ $f(x)$.

عندها $V(x)$ تابع غير متزايد ويحقق أيضاً $V(x_0) < m$ و $V(Y_t) < m$ وذلك $\forall t \geq 0$.

تعريف (2-13) :

ليكن $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N$ متغيرات عشوائية فوق فضاء احتمالي (Ω, F, P) عندئذٍ سيكون التطبيق:

$$(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N) : \Omega \longrightarrow \Re^N$$

$$w \longrightarrow (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N)(w) = \left(\xi_1(w), \xi_2(w), ..., \xi_N(w) \right)$$

عنصراً عشوائياً فوق (Ω, F, P) يقيم في $(\Re^N, R^N)$ وذلك لأنه من أجل كل $B_1, B_2, ..., B_N \in \Re$ يحقق ما يلي:

$$(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N)^{-1}(B_1 \times B_2 \times .... \times B_N) =$$

$$= \left\{ w \in \Omega \setminus \xi_1(w) \in B_1, \xi_2(w) \in B_2, ..., \xi_N(w) \in B_N \right\} = \bigcap_{K=1}^{N} \xi_K^{-1}(B_K) \in F$$

لأن $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N$ متغيرات عشوائية.

وهذا العنصر العشوائي يسمى متجه عشوائي ونرمز له بالرمز X_N حيث :

$$X_N = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N)$$

تعريف (2-14):

ليكن لدينا متجهاً عشوائياً $X_N = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N)$ فوق فضاء احتمالي (Ω, F, P) عندئذٍ يعرف التوقع الرياضي لـ X_N من خلال العلاقة :

$$E(X_N) = (E\xi_1, E\xi_2, ..., E\xi_N)$$

ويمكن أن نكتب:

$$E(X_N) = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_N)$$

علماً أن $\mu_K = E\xi_K$ من أجل $K \in N_n$ وهكذا سيكون لدينا:

$$E^T(X_N) = \begin{pmatrix} E\xi_1 \\ E\xi_2 \\ \vdots \\ E\xi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{pmatrix}$$

حيث من أجل المصفوفة A نرمز بـ A^T لمنقول المصفوفة A .

2-1-1- السلسلة الماركوفية:

لتكن لدينا المتتالية $\{x_t\}_{t \in T}$ عملية عشوائية إذا كانت T = N و $\Omega' \subseteq R$ فـإن العمليـة العشوائية تسمى سلسلة ماركوفية.

2-1-2- مصفوفة الانتقال للعملية الماركوفية:

ليكن X_N متحول عشوائي يأخذ القيم $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_q$ باحتمالات $P_1(n), P_2(n), ..., P_q(n)$ حيث إن :

$$P_K(n) = P(X_n = \theta_K)$$

لنأخذ المتجه:

$$P(n) = \begin{bmatrix} P_1(n) \\ P_2(n) \\ \vdots \\ P_q(n) \end{bmatrix}$$

ولنفرض أن :

$$P_K(n) \geq 0 \wedge \sum_{k=1}^{q} P_K(n) = 1$$

بما أن المتتالية $\{X_N\}$ عملية ماركوفية فهذا يعني أن :

$$P(n+1)=\prod(n).P(n)$$

تكتب هذه العلاقة على الشكل :

$$\begin{bmatrix} P_1(n+1) \\ P_2(n+1) \\ \vdots \\ P_q(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \prod_{11}(n) & \prod_{12}(n) & \cdots & \prod_{1q}(n) \\ \prod_{21}(n) & \prod_{22}(n) & \cdots & \prod_{2q}(n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \prod_{q1}(n) & \prod_{q2}(n) & \cdots & \prod_{qq}(n) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} P_1(n) \\ P_2(n) \\ \vdots \\ P_q(n) \end{bmatrix}$$

حيث أن $\prod_{ij}(n)$ يمثل احتمال الانتقال، الدليل الأول يرمز إلى نتيجة التجربة السابقة أما الدليل الثاني فيرمز إلى الحالة التي تؤول إليها الجملة في اللحظة الزمنية التالية إن الصورة الكاملة لاحتمالات التغيير للتغيرات الممكنة حين الانتقال من تجربة إلى التي تليها مباشرة تعطى بالمصفوفة $\prod(n)$ والتي تسمى مصفوفة الانتقال للعملية الماركوفية.

لنفرض أن المصفوفة $\prod(n)$ مصفوفة عشوائية ولنوجد شروط وجود المصفوفة $\prod(n)$.

شروط وجود المصفوفة $\prod(n)$:

بفرض أن كلاً من $P(n)$ و $P(n+1)$ موجود ولنفرض أن $P_1(n) = 1$ نجد أن :

$$P_2(n) = P_3(n) = \ldots\ldots.. = P_q(n) = 0$$

وبالتالي نجد أن:

$$\begin{bmatrix} P_1(n+1) \\ P_2(n+1) \\ \vdots \\ P_q(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \prod_{11}(n) & \prod_{12}(n) & \cdots & \prod_{1q}(n) \\ \prod_{21}(n) & \prod_{22}(n) & \cdots & \prod_{2q}(n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \prod_{q1}(n) & \prod_{q2}(n) & \cdots & \prod_{qq}(n) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} P_1(n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

بجمع العلاقات السابقة نجد أن :

$$\sum_{k=1}^{q} P_K(n+1) = \left[\prod_{11}(n)+\prod_{21}(n)+....+\prod_{q1}(n)\right]. P_1(n)$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \prod_{K1}(n)$$

بما أن العملية ماركوفية فإن:

$$1=\sum_{k=1}^{q} P_K(n+1)$$

وبالتالي نجد أن :

$$1=\sum_{k=1}^{q} \prod_{K1}(n)$$

ومنه نستنتج أن :

$$\prod_{KS}\geq 0 \wedge \sum_{k=1}^{q} \prod_{KS}(n)=1 \;\; ; \;\; k,s=1,2,...,q$$

وهذه الشروط الأخيرة كافية.

الآن لنثبت أن $\sum_{k=1}^{q} P_K(n+1)=1$.

الإثبات :

بما أن العملية ماركوفية أي أن: $P(n+1)=\prod(n).P(n)$

ومنه نجد أن:

$$P_1(n+1)=\prod_{11}(n)P_1(n)+\prod_{12}(n)P_2(n)+....+\prod_{1q}(n)P_q(n)$$

$$P_2(n+1)=\prod_{21}(n)P_1(n)+\prod_{22}(n)P_2(n)+....+\prod_{2q}(n)P_q(n)$$

....

$$P_q(n+1)=\prod_{q1}(n)P_1(n)+\prod_{q2}(n)P_2(n)+....+\prod_{qq}(n)P_q(n)$$

أي أن من أجل $k = 1,2,..,q$ يكون لدينا:

$$P_k(n+1)=\prod_{k1}(n)P_1(n)+\prod_{k2}(n)P_2(n)+....+\prod_{kq}(n)P_q(n)$$

$$\sum_{k=1}^{q} P_k(n+1)=\sum_{k=1}^{q}\prod_{k1}(n)P_1(n)+\sum_{k=1}^{q}\prod_{k2}(n)P_2(n)+....+\sum_{k=1}^{q}\prod_{kq}(n)P_q(n)$$

$$=P_1(n)\sum_{k=1}^{q}\prod_{k1}(n)+P_2(n).\sum_{k=1}^{q}\prod_{k2}(n)+....+P_q(n)\sum_{k=1}^{q}\prod_{kq}(n)$$

$$=P_1(n).1+P_2(n).1+...+P_q(n).1=\sum_{k=1}^{q} P_k(n)=1$$

نتيجة (2-1) :

ليكن لدينا المتجه $e = (1,1,\ldots,1)$ وبالتالي:

$$e\prod = (1,1,\ldots,1)\begin{bmatrix} \prod_{11} & \prod_{12} & \cdots & \prod_{1q} \\ \prod_{21} & \prod_{22} & \cdots & \prod_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \prod_{q1} & \prod_{q2} & \cdots & \prod_{qq} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{q} \prod_{k1} , \sum_{k=1}^{q} \prod_{k2} , \ldots , \sum_{k=1}^{q} \prod_{kq} \right)$$

$$= (1,1,\ldots,1) = e$$

2-1-3- المصفوفة العشوائية:

تدعى المصفوفة $\prod$ مصفوفة عشوائية إذا كانت عناصرها غير سالبة وكـان مجمـوع عناصر كل عمود فيها يساوي الواحد.

ملاحظة (2-2) :

من العلاقة $e.\prod = e$ نجد أن القيمة $\lambda = 1$ هي قيمة ذاتية يسارية لها و e متجـه ذاتـي موافق للقيمة الذاتية اليسارية $\lambda = 1$ للمصفوفة $\prod$.

ملاحظة (2-3) :

إذا عرفنا نظيم المتجه P بالعلاقة :

$$\| P \| = | P_1 | + | P_2 | + \ldots + | P_q |$$

عندئذٍ فإن نظيم المصفوفة $\prod$ يعطى بالعلاقة :

$$\| \prod \| = \max_{S} \left(\sum_{k=1}^{q} \prod_{KS} \right) = 1$$

ومنه نستنتج أن القيمة المطلقة للقيم الذاتية للمصفوفة $\prod$ أصغر أو تساوي 1 لأنه إذا أخذنا $\prod P = \lambda P$ ، حيث λ قيمة ذاتية و P متجه ذاتي موافق للقيمة λ نجد أن:

$$\| \prod P \| \le \| \prod \| . \| P \|$$

$$\| \prod P \| = \| \lambda . P \| = | \lambda | . \| P \|$$

$$| \lambda | . \| P \| \leq \| \prod \| . \| P \|$$

$$| \lambda | \leq \| \prod \| = 1$$

$$\Rightarrow | \lambda | \leq 1$$

2-1-4- العملية الماركوفية المتقاربة:

العملية الماركوفية تدعى متقاربة إذا وجدت نهاية $P(n)$ $P_{\infty} = \lim_{n \to +\infty}$ وكانت هذه النهاية غير متعلقة بالشروط الابتدائية أي $P(0)$.

2-2- دراسة الاستقرار لجملة معادلات لا توقفية :

سندرس في البداية النموذج:

$$\frac{dX(t)}{dt} = A\left(t, \xi(t)\right) X(t) \; ; \; \dim X = m \qquad (1-2)$$

حيث $\xi(t)$ طور ماركوفي عشوائي منتهٍ يأخذ القيم: $\theta_1, \theta_2, .., \theta_q$

لنضع:

$$P_k(t) = P\left(\xi(t) = \theta_k\right) \qquad (2-2)$$

ولنفرض أن الاحتمالات $P_k(t)$ تحقق جملة المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال المتحولة الآتية :

$$\frac{dP_K(t)}{dt} = \sum_{S=1}^{q} \alpha_{KS}(t) P_S(t) \; ; \; K = 1, 2, ..., q \qquad (3-2)$$

المعادلات (2-1) و(2-3) تعنيان متجه العملية الماركوفية العشوائية المنقطعة $(x(t), \xi(t))$ ذات دالة الكثافة الاحتمالية الآتية:

$$f\left(t, X(t), \xi(t)\right) = \sum_{K=1}^{q} f_K(t, x(t)) \, \delta(\xi - \theta_K)$$

حيث δ دالة دلتا و$f_k(t, X(t))$ الكثافة الاحتمالية الجزئية.

إن التوقع الرياضي للدالة العشوائية $V(t, X(t), \xi(t))$ يعطى بالشكل الآتي: حسب المرجع [2]

$$E_K\left(V(t,X(t),\xi(t)\right) = \sum_{K=1}^{q} E_K\left(V(t,X(t),\theta_k(t)\right) \qquad (4\text{-}2)$$

حيث E_K التوقعات الرياضية الجزئية التي تعطى بالصيغة:

$$E_K\left(V(t,X(t),\theta_k(t)\right) = \int_{\Omega_m} V\left(t,X(t),\theta_k\right) f_k(t,x)\,dX$$

$$K = 1, \ldots, q$$

حيث Ω_m الفضاء الطوري للمتحولات $X_1, \ldots, X_m$ ذي البعد m وإن :

$$dX = dX_1 \ldots dX_m$$

وبالتالي لنحسب :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(f_k(t,x)A_k(t)X\right) &= \sum_{S=1}^{m} \frac{\partial}{\partial X_S}\left(f_K(t,x)\sum_{j=1}^{m} a_{sj}^{(k)}(t)X_j\right) \\
&= \sum_{S=1}^{m} \frac{\partial f_K(t,x)}{\partial X_S}\sum_{j=1}^{m} a_{sj}^{(k)}(t)X_j + f_K(t,x)\sum_{j=1}^{m} a_{jj}^{(k)}(t)
\end{aligned}$$

لنفرض أن $A(t,\theta_k) = A_k(t)$ حيث $k = 1,2,\ldots,q$.

من أجل ذلك نستطيع أن نكتب :

$$X_{n+1} = X_n + h\left[A_k(t)X_n\right]$$

وبحسب المرجع [13] نكتب المعادلة :

$$\begin{aligned}
f_k(t_{n+1},X) &= f_k\left(t_n,\left(E+hA_k(t)\right)^{-1}.X\right).\left|\det\left(E+hA_k(t)\right)^{-1}\right| + \\
&+ h\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}.f_s\left(t_n,\left(E+hA_s(t)\right)^{-1}.X\right).\left|\det\left(E+hA_s(t)\right)^{-1}\right|
\end{aligned} \qquad (5\text{-}2)$$

لنحسب :

$$\det\left(E+hA_k(t)\right)^{-1} = \frac{1}{\det\left(E+hA_k(t)\right)}$$

لكن:

$$\det\left(E+hA_k(t)\right)=\begin{vmatrix}1+ha_{11}^k(t) & ha_{12}^k(t) & \cdots & ha_{1m}^k(t)\\ ha_{21}^k(t) & 1+ha_{22}^k(t) & \cdots & ha_{2m}^k(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ ha_{m1}^k(t) & ha_{m2}^k(t) & \cdots & 1+ha_{mm}^k(t)\end{vmatrix}$$

$$=1+h\left(a_{11}^k(t)+a_{22}^k(t)+.....+a_{mm}^k(t)\right)+O(h^2)$$

نهمل كافة الحدود بقوى h^2 و h^3 و.....

$$\Rightarrow \det\left(E+hA_k(t)\right)=1+h\left[\operatorname{tr}A\left(A_k(t)\right)\right]$$

$$\Rightarrow \det\left(E+hA_k(t)\right)^{-1}=\frac{1}{1+h.\operatorname{tr}A\left(A_k(t)\right)}$$

حسب النشر في سلسلة هندسية :

$$\frac{1}{1-\left(-h.\operatorname{tr}A\left(A_k(t)\right)\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-h.\operatorname{tr}A\left(A_k(t)\right)\right)^n$$
$$=1-h.\operatorname{tr}A\left(A_k(t)\right)+O(h^2)$$

كذلك الأمر بإهمال كافة الحدود بقوى h^2 وh^3 و... نحصل على :

$$\det\left(E+hA_k(t)\right)^{-1}=1-h\left(\operatorname{tr}A\left(A_k(t)\right)\right)$$

من جهة أخرى لنحسب وباستخدام سلسلة ذي الحدين :

$$\left(E+hA_k(t)\right)^{-1}X=\left(E-hA_k(t)+.....\right)X$$
$$=X-hA_k(t)X+...$$

ومع إهمال الحدود بقوى h^2 وh^3 و....... نحصل على :

$$\left(E+hA_k(t)\right)^{-1}X=X-hA_k(t)X$$

لنفرض $Z = A_k(t)X$ ، ومنه نجد أن :

$$X_{n+1} = X_n + hZ$$

ويمكن أن نكتب من نشر تايلور للدالة $f_k(t_n, X)$ بالنسبة للوسيط t :

$$f_k(t_{n+1}, X) = f_k(t_n + h, X)$$

$$= f_k(t_n, X) + \frac{\partial f_k(t_n, X)}{\partial t}h + \frac{1}{2!}.\frac{\partial 2 f_k(t_n, X)}{\partial t^2}h^2 + \dots\dots$$

ومع إهمال الحدود بقوى h^2 وh^3 و....... نحصل على :

$$f_k(t_{n+1}, X) = f_k(t_n, X) + \frac{\partial f_k(t_n, X)}{\partial t}h$$

لنكتب :

$$f_k(t_n, X - hZ) = f_k(t_n, X_1 - hZ_1, X_2 - hZ_2, \dots, X_m - hZ_m)$$

حيث : $Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_m \end{pmatrix}$

$$= f_k(t_n, X_1, X_2, \dots, X_m) - \frac{\partial f_k(t_n, X_1)}{\partial X_1}hZ_1 -$$

$$-\frac{\partial f_k(t_n, X_2)}{\partial X_2}hZ_2 - \dots\dots - \frac{\partial f_k(t_n, X_m)}{\partial X_m}hZ_m$$

$$= f_k(t_n, X_1, X_2, \dots, X_m) - h\left(\frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2} + \dots + \frac{\partial}{\partial X_m}\right)f_k(t_n, X).Z$$

حيث الجداء الأخير هو جداء متجهي.

$$= f_k(t_n, X_1, X_2, \dots, X_m) - h\frac{Df_k(t_n, X)}{DX}.Z$$

بالتعويض في المعادلة الأساسية (2-5) وبجعل $t_n \to t$ نحصل على :

$$f_k(t, X) - \frac{\partial f_k(t, X)}{\partial t}h = \left[f_k(t, X) - h\frac{Df_k(t, X)}{DX}\left[A_k(t)\right]X\right].$$

$$.\left[1 - h\,\mathrm{trA}\left(A_k(t)\right)\right] + \sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)f_s(t, X)h$$

مع الأخذ بعين الاعتبار أنه تم إهمال الحدود بقوى h^2 وh^3 و.......

ومنه نجد :

$$\frac{\partial f_k(t,X)}{\partial t}h=-h\frac{Df_k(t,X)}{DX}\left[A_k(t)X\right].\left[1-h\,trA\left(A_k(t)\right)\right]+$$
$$+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)f_s(t,X)h-h\,f_k(t,X)trA\left(A_k(t)\right)$$

بالتقسيم على h وجعل $h\to 0$ نحصل على :

$$\frac{\partial f_k(t,X)}{\partial t}=-\frac{Df_k(t,X)}{DX}\left[A_k(t)X\right]-f_k(t,X)trA\left(A_k(t)\right)+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)f_s(t,X)$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial f_k(t,X)}{\partial t}=-\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial X_s}\left[f_k(t,X)A_k(t)X\right]+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)f_s(t,X)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial f_k(t,X)}{\partial t}=-\mathrm{div}\left[f_k(t,X)A_k(t)X\right]+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)f_s(t,X)$$

الآن من (2-4) يكون لدينا :

$$dE_K\left(V(t,X(t),\xi(t)\right)=\int_{\Omega_m}\frac{\partial V(t,X,\theta_k)}{\partial t}f_k(t,x)\,dX\,dt+$$
$$+\int_{\Omega_m}\frac{DV(t,X,\theta_k)}{DX}f_k(t,x)\,dX\,dx+\int_{\Omega_m}V(t,X,\theta_k)\frac{\partial f_k(t,X)}{\partial t}dX\,dt$$
$$+\int_{\Omega_m}V(t,X,\theta_k)\frac{Df_k(t,X)}{DX}dX\,dx\ \Rightarrow$$
$$\frac{dE_K\left(V(t,X(t),\xi(t)\right)}{dt}=\int_{\Omega_m}\frac{\partial V(t,X,\theta_k)}{\partial t}f_k(t,x)\,dX+$$
$$+\int_{\Omega_m}\frac{DV(t,X,\theta_k)}{DX}f_k(t,x)\frac{dX}{dt}dX+$$
$$+\int_{\Omega_m}V(t,X,\theta_k)\left[-\mathrm{div}\left(f_k(t,x)A_k(t)X\right)+\sum_{S=1}^{q}\alpha_{KS}(t)f_S(t,x)\right]dX$$
$$+\int_{\Omega_m}V(t,X,\theta_k)\frac{Df_k(t,X)}{DX}\frac{dX}{dt}dX$$

حيث : $\frac{dX}{dt} = A_K(t)X$

$$\Rightarrow \frac{dE_K\left(V(t,X(t),\xi(t))\right)}{dt} = E_K\left(\frac{\partial V(t,X,\theta_k)}{\partial t}\right) +$$

$$+E_K\left(\frac{DV(t,X,\theta_k)}{DX}A_K(t)X\right) -$$

$$-\int_{\Omega_m} V(t,X,\theta_k)\,\mathrm{div}\left(f_k(t,x)A_k(t)X\right)dX$$

$$+\sum_{S=1}^{q}\alpha_{KS}(t)\int_{\Omega_m} V(t,X,\theta_k)f_S(t,x)\,dX +$$

$$+\int_{\Omega_m} V(t,X,\theta_k)\frac{Df_k(t,x)}{DX}.A_K(t)X\,dX$$

لكن :

$$\mathrm{div}\left(f_k(t,x),A_K(t)X\right) = \frac{Df_k(t,x)}{DX}A_K(t)X$$

$$\Rightarrow \frac{dE_K\left(V(t,X,\xi(t))\right)}{dt} = E_K\left(\frac{\partial V(t,X,\theta_k)}{\partial t} + \frac{DV(t,X,\theta_k)}{DX}A_K(t)X\right)$$

$$+\sum_{S=1}^{q}\alpha_{KS}E_S\left(V(t,X,\theta_k)\right) \; ; K = 1,....,q$$

لنبحث عن دالة ليابونوف العشوائية بصيغتها التربيعية من الشكل:

$$V\left(t,X(t),\xi(t)\right) = X^*(t)C\left(t,\xi(t)\right)X(t)$$

ذات القيم الجزئية:

$$V_K\left(t,X(t)\right) = X^*(t)C_K(t)X(t)$$

حيث:

$$C_K(t) = C(t,\theta_k) \; ; K = 1,2,...,q$$

بدايةً لنعرف الجداء الداخلي لمصفوفتين عقديتين $A = (a_{KS})$ و $B = (b_{KS})$

حيث $K = 1,2,..,m$ بالشكل التالي: [1]

$$AoB = \sum_{K=1}^{m} \sum_{S=1}^{\ell} a_{KS} \overline{b_{KS}} \quad ; \ S = 1,2,\ldots,\ell \ ; \ K = 1,2,\ldots,m \qquad (6\text{-}2)$$

حيث o ترمز للجداء الداخلي .

لنكتب :

$$V_K(t, X(t)) = X^*(t) C_K(t) X(t) = C_K(t) o (X(t) X^*(t)) \ ; \ K = 1,..,q$$

وبما أن مصفوفات العزوم الجزئية من المرتبة الثانية $M_K(t)$ تأخذ الشكل:

$$M_K(t) = E_K(X(t) X^*(t)) = \int_{\Omega_m} X X^* f_k(t,x) dX$$

لنحسب:

$$\frac{d}{dt}\left[C_K(t) o M_K(t) \right] = \frac{dC_K(t)}{dt} o M_K(t) + C_K(t) o \frac{dM_K(t)}{dt} =$$

$$= \frac{dC_K(t)}{dt} o M_K(t) + C_K(t) o \int_{\Omega_m} \frac{dX}{dt} . X^* f_k(t,x) dX +$$

$$+ C_K(t) \int_{\Omega_m} X . \frac{dX^*}{dt} f_k(t,x) dX + C_K(t) \int_{\Omega_m} X X^* \frac{df_k(t,x)}{dt} dX$$

$$= \frac{dC_K(t)}{dt} o M_K(t) + C_K(t) A_K(t) \int_{\Omega_m} \frac{dX}{dt} . X^* f_k(t,x) dX$$

$$+ C_K(t) \int_{\Omega_m} X . X^* A_K^*(t) f_k(t,x) dX +$$

$$+ C_K(t) \int_{\Omega_m} X . X^* \sum_{S=1}^{q} \alpha_{KS} f_S(t,x) dX$$

$$= \frac{dC_K(t)}{dt} o M_K(t) + C_K(t) A_K(t) o M_K(t) +$$

$$+ A^*(t) C_K(t) o M_K(t) + \sum_{S=1}^{q} \alpha_{KS} \left(C_K(t) \right) o M_S(t) \qquad (7\text{-}2)$$

$$K = 1,2, \ldots, q$$

لنكتب الشكل التربيعي لـ $w\left(t,X(t),\xi(t)\right)$ بالصيغة :

$$w\left(t,X(t),\xi(t)\right) = X^{*}B\left(t,\xi(t)\right)X$$

والأشكال التربيعية الجزئية منه هي:

$$w_k\left(t,X(t),\xi(t)\right) = X^{*}B_K(t)X$$

حيث:

$$B_K(t) = B(t,\theta_k) \quad ; \quad K = (1,..,q)$$

وبتطبيق مبدأ ليابونوف لنضع أن:

$$\frac{dE(V(t,X(t),\xi(t))}{dt} = -E(w(t,X(t),\xi(t))$$

وذلك من أجل أي قيم لـ $X(t)$ و $\xi(t)$.

لدينا:

$$E(V(t,X(t),\xi(t)) = \sum_{K=1}^{q} E_K(V(t,X(t),\xi(t))$$

$$w_k(t, X(t), \xi(t)) = X^{*}B_K(t)X$$

$$B_K(t) = B(t,\theta_k) \; ; \quad K = (1,..,q)$$

$$\sum_{K=1}^{q} E_K\frac{dV_K\left(t,X(t),\xi(t)\right)}{dt} = -\sum_{K=1}^{q} E_K(w(t,X(t),\xi(t))$$

$$\sum_{K=1}^{q} E_K\left(\frac{d(X^{*}(t)C_K(t)X(t)}{dt}\right) = -\sum_{K=1}^{q} E_K(X^{*}(t)B_K(t)X(t))$$

$$\sum_{K=1}^{q} E_K\left(\frac{d(C_K(t)o(X^{*}(t)X(t))}{dt}\right) = -\sum_{K=1}^{q} E_K(B_K(t)o(X^{*}(t)X(t)))$$

$$\sum_{K=1}^{q}\frac{d}{dt}\left(C_K(t)oE_K(X^{*}(t)X(t))\right) = -\sum_{K=1}^{q} B_K(t)oE_K(X^{*}(t)X(t))$$

$$\sum_{K=1}^{q} \frac{d}{dt}(C_K(t) \circ M_K(t)) = -\sum_{K=1}^{q} B_K(t) \circ M_K(t)$$

$$\sum_{K=1}^{q} \left(\frac{dC_K(t)}{dt} \circ M_K(t) + C_K(t) A_K(t) \circ M_K(t) + \right.$$

$$\left. + A_K^*(t) C_K(t) \circ M_K(t) + \sum_{S=1}^{q} \alpha_{KS} C_K(t)) \circ M_K(t) \right) =$$

$$= -\sum_{K=1}^{q} B_K(t) \circ M_K(t)$$

$$\sum_{K=1}^{q} \left(\frac{dC_K(t)}{dt} + C_K(t) A_K(t) + A_K^*(t) C_K(t) + \sum_{S=1}^{q} \alpha_{KS}(t) C_K(t) \right) \circ M_K(t)$$

$$= -\sum_{K=1}^{q} B_K(t) \circ M_K(t)$$

بالمطابقة نحصل على:

$$\frac{dC_K(t)}{dt} + C_K(t) A_K(t) + A_K^*(t) C_K(t) + \sum_{S=1}^{q} \alpha_{KS}(t) C_K(t) =$$

$$= -B_K(t) \ (K = 1,..,q)$$

$$X^* \left(\frac{dC_K(t)}{dt} + C_K(t) A_K(t) + A_K^*(t) C_K(t) + \sum_{S=1}^{q} \alpha_{KS}(t) C_K(t) \right) X$$

$$= -X^* B_K(t) X$$

$$\Rightarrow X^* \frac{dC_K(t)}{dt} X + X^* C_K(t) A_K(t) X + X^* A_K^*(t) C_K(t) X +$$

$$+ \sum_{S=1}^{q} \alpha_{KS} X^* C_K(t) X = -X^* B_K(t) X$$

$$\Rightarrow X^* \frac{dC_K(t)}{dt} X + X^* C_K(t) \frac{dX}{dt} + \frac{dX^*}{dt} C_K(t) X +$$

$$+ \sum_{S=1}^{q} \alpha_{KS} V_S(t,x) = -W_K(t,x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(X^* C_K(t)X) + \sum_{S=1}^{q} \alpha_{KS} V_S(t,x) = -W_K(t,x)$$

$$\frac{d^{(K)} V_K(t,x)}{dt} + \sum_{S=1}^{q} \alpha_{KS} V_S(t,x) = -W_K(t,x) \quad ; \quad K = 1, .., q$$

3-2- دراسة استقرار حل جملة المعادلات التفاضلية الخطية العشوائية:

لنأخذ الجملة :

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(\xi(t))\, X(t) \qquad (8\text{-}2)$$

حيث $\xi(t)$ عملية ماركوفية تأخذ القيم $\theta_1, \theta_2, .., \theta_q$ وفق الاحتمالات :

$$P_K(t) = P(\xi(t) = \theta_K) \quad ; \quad K = 1,..,q$$

والمحققة لجملة المعادلات التفاضلية:

$$\frac{dP_K(t)}{dt} = \sum_{S=1}^{q} \alpha_{KS}\, P_S(t) \quad ; \quad K = 1,..,q$$

ذوات الأمثال الثابتة α_{KS} .

لنبحث عن دالة ليابونوف العشوائية من الشكل التربيعي:

$$V(X(t), \xi(t)) = X^*(t)\, C(\xi(t))\, X(t)$$

حيث $C(\xi(t)) = C_K = C(\theta_K)$ حيث $\xi(t)$ تأخذ:

$$\theta_1, \theta_2, .., \theta_q \quad ; \quad K = 1, .., q$$

والمحققة للعلاقة:

$$\frac{dE(V(X(t), \xi(t))}{dt} = -E(w((X(t), \xi(t)))$$

حيث $w\big(X(t), \xi(t)\big)$ شكل تربيعي معطى كالآتي:

$$w\big(X(t), \xi(t)\big) = X^*(t)\, B(\xi(t))\, X(t)$$

$$B(\xi(t)) = B_K = B(\theta_K) \quad ; \quad (K = 1,..,q)$$

وأيضاً $A(\xi(t)) = A_K = A(\theta_K)$.

تعريف (2-15) :

ندعو الحل الصفري للجملة (2-8) مستقراً استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي إذا تحققت المساواة:

$$\lim_{t\to+\infty} E\left(x^*(t)\,x(t) \right) = \lim_{t\to+\infty} E\left(\| x(t) \|^2 \right) = 0$$

وذلك من أجل أي حل للجملة (2-8) هذا يعني أن جميع العزوم الابتدائية ومن المرتبة الثانية للجملة (2-8) تسعى إلى الصفر عندما $t \to +\infty$ لكي تحقق المساواة:

$$\lim_{t\to+\infty} E\left(x^*(t)\,x(t) \right) = \lim_{t\to+\infty} E\left(\| x(t) \|^2 \right) = 0$$

الآن من أجل أي حل للجملة السابقة يلزم ويكفي أن يكون:

$$\lim_{t\to+\infty} M(t) = 0 \;;\; M(t) = \sum_{K=1}^{q} M_K(t)$$

ننوه أن أثر المصفوفة $M(t)$ يساوي التوقع الرياضي للقيمة :

$$\| x(t) \|^2 = x^*(t)\,x(t)$$

إن العزوم الجزئية من المرتبة الثانية $M_K(t)$ $(K = 1,..,q)$ تحقق جملة المعادلات التفاضلية:

$$\frac{dM_K(t)}{dt} = A_K M_K(t) + M_K(t) A_K^* + \sum_{S=1}^{q} \alpha_{KS} M_S(t) \;;\; K = 1,..,q \qquad (9\text{-}2)$$

من العلاقة (2-5) وحسب العلاقة أيضاً:

$$X^*(t)\,C_K(t)\,X(t) = C_K(t)\,o\,(X(t)\,X^*(t))$$

وبالتالي فإنه لاستقرار الحل الصفري للجملة (2-8) استقرار مقارباً بالوسط التربيعي يلزم ويكفي أن يسعى أي حل للجملة الأخيرة (2-8) إلى الصفر عندما $t \to +\infty$.

لنعرف الجداء الداخلي :

$$0<\left\langle C(t),M(t)\right\rangle=\sum_{K=1}^{q}C_K(t)oM_K(t)\le Const$$

بالاعتماد على $\frac{dM_K(t)}{dt}$ نشتق العلاقة الأخيرة بالنسبة لـ t :

$$\sum_{K=1}^{q}\frac{dC_K(t)}{dt}oM_K(t)+\sum_{K=1}^{q}C_K(t)o\frac{dM_K(t)}{dt}=$$

$$=\sum_{K=1}^{q}\frac{dC_K(t)}{dt}oM_K(t)+$$

$$+\sum_{K=1}^{q}C_K(t)o\left[A_K(t)M_K(t)+M_K(t)A_K^*(t)+\sum_{S=1}^{q}\alpha_{KS}M_S(t)\right]=0$$

وبما أن:

$$CoAM = A^*CoM$$

$$CoMA^* = CAoM$$

والتي سيتم إثباتها في الفصل الثالث نكتب:

$$\sum_{K=1}^{q}\frac{dC_K(t)}{dt}oM_K(t)+\sum_{K=1}^{q}\left(A_K^*(t)C_K(t)+C_K(t)A_K(t)+\right.$$
$$\left.+\sum_{S=1}^{q}\alpha_{SK}C_K(t)\right)oM_K(t)=0$$

وبالتالي يحقق:

$$\frac{dC_K(t)}{dt}+A_K^*C_K(t)+C_K(t)A_K+\sum_{S=1}^{q}\alpha_{KS}C_S(t)=0\ ;\ K=1,..,q\quad(10\text{-}2)$$

وبالتالي يمكن صياغة المبرهنة التالية.

مبرهنة (2-1): [1]

الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري للجملة الأساسية (2-8) اسـتقرار مقاربـاً بالوسط التربيعي (أي أن يكون حل الجملة المعطاة (2-9) مـستقراً اسـتقراراً مقاربـاً عنـدما

$t \to +\infty$) أن يكون الحل الصفري للجملة المعطاة بـ $\frac{dC_K(t)}{dt}$ مستقراً استقراراً مقارباً مـن أجل $t \to -\infty$.

أما من أجل المعادلة التفاضلية الخطية ذات الطرف من الشكل:

$$\frac{dC_K(t)}{dt} + A_K^* C_K(t) + C_K(t) A_K + \sum_{\substack{S=1 \\ S \neq K}}^{q} \alpha_{SK} C_S(t) = -B_K \qquad (11\text{-}2)$$

يمكن صياغة المبرهنة الثانية.

مبرهنة (2-2): [1]

الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري للجملة (2-8) استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي أن يكون للجملة (2-11) بطرف حلاً مستقراً استقراراً مقارباً عندما $t \to -\infty$.

أي $C_k(t) = C_{Ko} = Const \quad K = 1,..,q$

وهذا يعني أن المصفوفة C_{Ko} تحقق جملة المعادلات الجبرية:

$$A_K^* C_{Ko} + C_{Ko} A_K + \sum_{S=1}^{q} \alpha_{SK} C_{So} = -B_K \ ; \ (K = 1,..,q)$$

وبالتالي C_{Ko} تحقق المعادلة:

$$C_K A_K + A_K^* C_K + \sum_{S=1}^{q} \alpha_{SK} C_K = -B_K \ ; \ (K = 1,...,q) \qquad (12\text{-}2)$$

التي نتجت عن دالة ليابونوف $V(t,x,\xi)$ في العلاقة:

$$V\big(t, X(t), \xi(t)\big) = X^*(t)\, C\big(t, \xi(t)\big)\, X(t)$$

وهذا يعني أنه يمكننا استخدام المعادلة $\frac{dC_K(t)}{dt}$ بدون طرف أو $\frac{dC_K(t)}{dt}$ مع طرف لإنشاء دالة ليابونوف $V\big(t, X(t), \xi(t)\big)$ فمن أجل قيم صغيرة جداً لـ $h > 0$ يمكننا كتابة قانون التقريب المتتالي الآتي:

$$C_{K,n+1} = C_{K,n} + h\Big(A_K^* C_{K,n} + C_{K,n} + \sum_{S=1}^{q} \alpha_{SK,n} C_{S,n} + B_K\Big) \ ; \ n = 1,..,$$

وأن $\lim_{t \to +\infty} C_{K,n} = C_{K,0}$ وذلك من أجل أي قيمة ابتدائية $C_{K,1}$.

4-2- دالة ليابونوف العشوائية:

تعريف (2-16):

لتكن C وD مصفوفتين تناظريتين نكتب $C \le D$ إذا كان:

$$X^* CX \le X^* DX$$

تعريف (2-17) :

ندعو دالة ليابونوف العشوائية $V(t,x, \xi)$ دالة موجبة تماماً إذا كانت تحقق المتراجحة:

$$V(t,x, \xi) \ge X^* DX \; ; D > 0$$

وذلك من أجل أي قيمة لـ ξ $(\xi = \theta_1, \theta_2,.., \theta_q)$.

لنرمز بـ $\alpha(C)$ و $\beta(C)$ لأصغر قيمة ذاتية وأعظم قيمة ذاتية على الترتيب للمصفوفة C ومن المعلوم أنه لاستقرار الحل الصفري للجملة $\frac{dX(t)}{dt} = A(\xi(t))\,X(t)$ تتحقق المتراجحة:

$$\alpha(C)\| x \|^2 \le X^* C X \le \beta(C)\| x \|^2 \; ; \| x \|^2 = X^* X$$

وذلك من أجل كل قيم X.

تمهيدية :

لتكن C وD مصفوفتين تناظريتين وبحيث $C \le D$:

$$C \text{ o } M_K(t) \le D \text{ o } M_K(t) \quad ; \quad (K = 1,..,q)$$

وبالتالي:

$$C \text{ o } M(t) \le D \text{ o } M(t)$$

الإثبات:

من الفرض : $X^* CX \le X^* DX$

نضرب طرفي المتراجحة بالتابع غير السالب $f_k(t,x)$ ونكامل الطرفين على كامل الفضاء Ω_m نجد:

$$\int_{\Omega_m} X^*C X f_k(t,x)\, dX \le \int_{\Omega_m} X^*D X f_k(t,x)\, dX$$

من العلاقة:

$$V_K(t, x(t)) = X^*(t)C_K(t)X(t) = C_K(t)\,o\,(x(t)X^*(t))$$

$$K = 1,..,q$$

وحسب تعريف العزوم من المرتبة الثانية نحصل على:

$$C\ o\ M_K(t) \leq D\ o\ M_K(t) \quad (K = 1,..,q)$$

نأخذ مجموع طرفي المتراجحة من أجل كل قيم K:

$$\sum_{K=1}^{q} CoM_K(t) = CoM(t) \leq DoM(t) = \sum_{K=1}^{q} CoM_K(t)$$

مبرهنة (2-3): [1] و[3]

الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي لجملة المعادلات التفاضلية $\frac{dX(t)}{dt} = A(\xi(t))X(t)$ ذوات الأمثال الثابتة (وفق العملية الماركوفية) وجود حل C_{Ko} حيث (K = 1,..,q) للمعادلة (2-10):

بحيث $C_{Ko} > 0$ (K = 1,..,q) من أجل أي مصفوفات $B_K > 0$ حيث (K = 1,..,q)

كفاية الشرط :

من أجل $B_K > 0$ نفرض وجود حل $C_{Ko} > 0$ حيث (K = 1,..,q) للمعادلة المعطاة ولنثبت أن حل الجملة مستقر استقراراً مقارباً. وبالاعتماد على معادلة الجملة الأساسية وعلى :

$$\frac{d}{dt}\left(E_K(V(t,X(t),\xi(t)))\right) = E_K\left(\frac{\partial V(t,X,\xi)}{\partial t} + \frac{DV(t,X,\xi)}{DX}A_K(t)X\right)$$
$$+\sum_{S=1}^{q}\alpha_{KS}(t)E_S\left(V(t,X(t),\theta_K)\right)$$

نحسب مشتق التابع $E\left(V\left(X(t),\xi(t)\right)\right)$ فنجد أن:

$$\frac{dE\left(V(X(t),\xi(t)\right)}{dt} = -E\left(W(X(t),\xi(t))\right)$$

حيث:

$$W\left(X(t),\xi(t)\right)=X^{*}B\left(\xi(t)\right)X$$

$$B_K=B(\theta_K)\ ;\ K=1,..,q$$

وبما أن التوابع $V(X,\xi)$ و $W(X,\xi)$ موجبة تماماً إذن توجد ثابتة $\gamma>0$ بحيث تتحقق دوماً المتراجحة:

$$\gamma V(X,\xi)\le W(X,\xi)\ (\xi=\theta_1,\theta_2,..,\theta_q)$$

وبالتالي يكون:

$$\gamma E\left(V\left(X(t),\xi(t)\right)\right)\le E\left(W\left(X(t),\xi(t)\right)\right)$$

$$\gamma E\left(V\left(X(t),\xi(t)\right)\right)\le -\frac{dE\left(V\left(X(t),\xi(t)\right)\right)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dE\left(V\left(X(t),\xi(t)\right)\right)}{dt}\le -\gamma E\left(V\left(X(t),\xi(t)\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dE\left(V\left(X(t),\xi(t)\right)\right)}{E\left(V\left(X(t),\xi(t)\right)\right)}\le -\gamma\, dt$$

نكامل الطرفين :

$$\ell n\, E\left(V\left(X(t),\xi(t)\right)\right)\le -\gamma t+\ell n\ E\left(V\left(X(o),\xi(o)\right)\right)$$

$$E\left(V\left(X(t),\xi(t)\right)\right)\le e^{-\gamma t}\, E\left(V\left(X(o),\xi(o)\right)\right)$$

بما أن التابع موجب تماماً يوجد ثابتين $\delta_1>0$ و $\delta_2>0$ بحيث تحقق المتراجحة:

$$\delta_1 V(x,\xi)\le \|x\|^2\le \delta_2 V(x,\xi)$$

$$\xi=\theta_1,\theta_2,..,\theta_q$$

$$\delta_1 E\left(V(x,\xi)\right)\le E\left(\|x\|^2\right)\le \delta_2 E\left(V(x,\xi)\right)$$

من جهة أولى:

$$E\left(\|x\|^2\right)\le \delta_2 e^{-\gamma t}E\left(V\left(x(o),\xi(o)\right)\right)$$

ولدينا أيضاً:

$$\delta_1 E\left(V\left(x(o),\xi(o)\right)\right) \le \| x_0 \|^2$$

$$E\left(V\left(X(o),\xi(o)\right)\right) \le \frac{1}{\delta_1} \| x_0 \|^2$$

$$E\left(\| x \|^2\right) \le \delta_2 e^{-\gamma t} E\left(V\left(X(o),\xi(o)\right)\right) \le \frac{\delta_2}{\delta_1} e^{-\gamma t} \| x_0 \|^2$$

وهذا يعني أن الحل مستقر استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي.

لزوم الشرط :

نفرض أن الحل الصفري للجملة مستقراً استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي هذا يعني أن الحل الصفري للجملة $\frac{dM_K(t)}{dt}$ مستقر من أجل $t \to +\infty$ أي أن الحل الصفري للجملة $\frac{dC_K(t)}{dt}$ مستقر استقراراً مقارباً عندما $t \to -\infty$.

لدينا الجملة:

$$\frac{dC_K(t)}{dt} + A_K^* C_K(t) + C_K(t) A_K + \sum_{\substack{S=1 \\ S\neq K}}^{q} \alpha_{SK} C_S(t) = -B_K$$

لنضع:

$$\frac{dC_K(t)}{dt} + A_K^* C_K(t) + C_K(t) A_K + \sum_{\substack{S=1 \\ S\neq K}}^{q} \alpha_{SK} C_S(t) + \alpha_{KK} C_K(t) = -B_K$$

$$\frac{dC_K(t)}{dt} + (A_K^* + A_K + \alpha_{KK} I) C_K(t) = -\left[B_K + \sum_{\substack{S=1 \\ S\neq K}}^{q} \alpha_{SK} C_S(t) \right]$$

لنحل المتجانسة منها:

$$\frac{dC_K(t)}{dt} + (A_K^* + A_K + \alpha_{KK} I) C_K(t) = 0$$

$$\frac{dC_K(t)}{C_K(t)} = -(A_K^* + A_K + \alpha_{KK} I)dt$$

$$\ell n C_K(t) = -(A_K^* + A_K + \alpha_{KK} I)t + \ell n C_0$$

$$C_K(t) = C_0 e^{-(A_K^* + A_K + \alpha_{KK} I)t}$$

نعتبر C_0 تابع لـ t ونشتق بالنسبة لـ t :

$$\frac{dC_K(t)}{dt} = \frac{dC_0}{dt} e^{-(A_K^* + A_K + \alpha_{KK} I)t} - C_0(A_K^* + A_K + \alpha_{KK} I)e^{-(A_K^* + A_K + \alpha_{KK} I)t}$$

نعوض في غير المتجانسة :

$$\frac{dC_0}{dt} e^{-(A_K^* + A_K + \alpha_{KK} I)t} - C_0(A_K^* + A_K + \alpha_{KK} I)e^{-(A_K^* + A_K + \alpha_{KK} I)t} +$$

$$+ C_0(A_K^* + A_K + \alpha_{KK} I)e^{-(A_K^* + A_K + \alpha_{KK} I)t} =$$

$$= -\left[B_K + \sum_{\substack{S=1 \\ S \neq K}}^{q} \alpha_{SK} C_S(t) \right]$$

$$\frac{dC_0}{dt} = -\left[B_K + \sum_{\substack{S=1 \\ S \neq K}}^{q} \alpha_{SK} C_S(t) \right] . e^{(A_K^* + A_K + \alpha_{KK} I)t}$$

نكتب:

$$C_0 = \int_t^0 \left[B_K + \sum_{\substack{S=1 \\ S \neq K}}^{q} \alpha_{SK} C_S(\tau) \right] . e^{(A_K^* + A_K + \alpha_{KK} I)\tau} d\tau + C_0^1$$

نعوض في الحل نجد أن:

$$C_K(t) = e^{-(A_K^* + A_K + \alpha_{KK} I)t} \int_t^0 \left[B_K + \sum_{\substack{S=1 \\ S \neq K}}^{q} \alpha_{SK} C_S(\tau) \right] . e^{(A_K^* + A_K + \alpha_{KK} I)\tau} d\tau$$

$$+ C_0^1 . e^{-(A_K^* + A_K + \alpha_{KK} I)t}$$

من أجل:

$$C_K(t)=\int_t^0 e^{(A_K^*+A_K+0,5\alpha_{KK}I+0,5\alpha_{KK}I)(\tau-t)}\left[B_K+\sum_{\substack{S=1\\S\neq K}}^{q}\alpha_{SK}C_S(\tau)\right]d\tau+$$

$$+C_0^1 e^{-(A_K^*+A_K+\alpha_{KK}I)t}$$

بوضع $C_0^1=0=C_K(0)$ نجد أن:

$$C_K(t)=\int_t^0 e^{(A_K^*+0,5\alpha_{KK}I)(\tau-t)}\left[B_K+\sum_{\substack{S=1\\S\neq K}}^{q}\alpha_{SK}C_S(\tau)\right].e^{(A_K+0,5\alpha_{KK}I)(\tau-t)}d\tau$$

$$K = 1, .. ,q$$

لنبدل كل $\tau-t$ بـ τ وكل τ بـ $\tau-t$:

$$C_K(t)=\int_0^{-t} e^{(A_K^*+0,5\alpha_{KK}I)\tau}\left[B_K+\sum_{\substack{S=1\\S\neq K}}^{q}\alpha_{SK}C_S(\tau-t)\right]e^{(A_K+0,5\alpha_{KK}I)\tau}d\tau$$

اعتماداً على أن:

$$C_{K_0}=\lim_{t\to-\infty}C_K(t)$$

نحصل على العلاقة:

$$C_{K_0}\geq\int_0^{\infty} e^{(A_K^*+0,5\alpha_{KK}I)\tau}B_K\,e^{(A_K+0,5\alpha_{KK}I)\tau}d\tau>0$$

وهو الشرط اللازم تحققه للاستقرار.

الفصل الثالث

دراسة استقرار الحل لجملة معادلات تفاضلية لا توقفية مضطربة

لندرس النموذج التالي :

$$\frac{dx}{dt} = A\left(t,\xi(t)\right)x(t) + \sum_{h=1}^{n} B_h(\xi(t))\,x(t) \qquad (1\text{-}3)$$

حيث $\xi(t)$ طور ماركوفي عشوائي منته يأخذ القيم $\theta_1,\theta_2,...,\theta_q$.

ولنفرض أن :

$$A(t,\theta_k) = A_k(t) \;\; ; \;\; B(\theta_k) = B_k \;\; ; \;\; k = 1,2,....,q$$

من أجل ذلك نستطيع أن نكتب :

$$X_{n+1} = X_n + \mu\left[A_k(t)\,X_n + \sum_{h=1}^{n} B_h^k\,X_n\right]$$

وبحسب [13] نكتب المعادلة :

$$\begin{aligned} f_k(t_{n+1},X) = {} & f_k\left(t_n,\left[E+\mu\left(A_k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_h^k\right)\right]^{-1}.X\right). \\ & .\left|\det\left[E+\mu\left(A_k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_h^k\right)-1\right]\right| + \\ & +\mu\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}.f_s\left(t_n,\left[E+\mu\left(A_s(t)+\sum_{h=1}^{n}B_h^k\right)\right]^{-1}.X\right) \\ & .\left|\det\left[E+\mu\left(A_s(t)+\sum_{h=1}^{n}B_h^k\right)-1\right]\right| \end{aligned} \qquad (2\text{-}3)$$

لنحسب :

$$\det\left(E+\mu\left(A_k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_h^k\right)^{-1}\right)=\frac{1}{\det\left(E+\mu\left(A_k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_h^k\right)\right)}$$

لكن:

$$\det\left(E+\mu\left(A_k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_h^k\right)\right)=$$

$$=\begin{vmatrix} 1+\mu\left(a_{11}^k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_{h11}^k\right) & \mu\left(a_{12}^k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_{h12}^k\right) & \cdots \\ \mu\left(a_{21}^k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_{h21}^k\right) & 1+\mu\left(a_{22}^k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_{h22}^k\right) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu\left(a_{m1}^k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_{hm1}^k\right) & \cdots & 1+\mu\left(a_{nn}^k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_{hnn}^k\right) \end{vmatrix}$$

$$=1+\mu\left(trA\left(A_k(t)+\sum_{h=1}^{n}trA\left(B_h^k\right)\right)\right)+.......$$

بإهمال الحدود التي تحوي μ^2 و μ^3 و..... نحصل على :

$$\det\left(E+\mu\left(A_k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_h^k\right)\right)=1+\mu\left(trA\left(A_k(t)\right)+\sum_{h=1}^{n}trA\left(B_h^k\right)\right)$$

$$\det\left(E+\mu\left(A_k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_h^k\right)\right)^{-1}=\frac{1}{1+\mu\left(trA\left(A_k(t)\right)+\sum_{h=1}^{n}trA\left(B_h^k\right)\right)}$$

$$=1-\mu\left(trA\left(A_k(t)\right)+\sum_{h=1}^{n}trA\left(B_h^k\right)\right)+...$$

بحسب النشر وفق سلسلة هندسية.

من جهة أخرى وباستخدام النشر وفق سلسلة ذي الحدين :

$$\left(E+\mu\left(A_k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_h^k\right)\right)^{-1}X=\left[E-\mu\left(A_k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_h^k\right)+....\right]X$$
$$=X-\mu\left(A_k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_h^k\right)X+...$$

بإهمال الحدود التي تحوي μ^2 وμ^3 و..... في النشرين السابقين نحصل على :

$$\det\left(E+\mu\left(A_k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_h^k\right)\right)^{-1}=1-\mu\left[trA\left(A_k(t)+\sum_{h=1}^{n}trA\left(B_h^k\right)\right)\right]$$

$$\left(E+\mu\left(A_k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_h^k\right)\right)^{-1}X=X-\mu\left(A_k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_h^k\right)X$$

لنفرض :

$$Z=\left(A_k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_h^k\right)X$$

ومنه نستطيع أن نكتب :

$$f_k(t_n,X-\mu Z)=f_k(t_n,X_1-\mu Z_1,X_2-\mu Z_2,....,X_m-\mu Z_m)$$
$$=f_k(t_n,X_1,X_2,....,X_m)-\frac{\partial f_k(t_n,X_1)}{\partial X_1}\mu Z_1-$$
$$-\frac{\partial f_k(t_n,X_2)}{\partial X_2}\mu Z_2-........-\frac{\partial f_k(t_n,X_m)}{\partial X_m}\mu Z_m$$

حيث أهملنا جميع الحدود التي تحوي μ^2 وμ^3 و....

$$\Rightarrow\ f_k(t_n,X-\mu Z)=f_k(t_n,X_1,X_2,....,X_m)-\mu\frac{Df_k(t_n,X)}{\partial X}.Z$$

حيث $Z=\begin{pmatrix}Z_1\\Z_2\\\vdots\\Z_m\end{pmatrix}$ ، وبجعل $t_n\to t$ وبالتعويض في العلاقة (3-2) وبالاستفادة من منشور تايلور للدالة f_k بالنسبة للوسيط t_n :

$$f_k(t_{n+1},X)=f_k(t_n+\mu,X)=f_k(t_n,X)+\frac{\partial f_k(t_n,X)}{\partial t}\mu+.....$$

ومع إهمال الحدود التي تحوي μ^2 و μ^3 و.... في نشر تايلور نجد أن :

$$f_k(t,X)+\frac{\partial f_k(t,X)}{\partial t}\mu=\left[f_k(t,X)-\mu\frac{Df_k(t,X)}{DX}\left[A_k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_h^k\right]X\right].$$
$$.\left[1-\mu\left(trA\left(A_k(t)\right)+\sum_{h=1}^{n}trA\left(B_h^k\right)\right)\right]+$$
$$+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)f_s(t,X)\mu$$

$$\frac{\partial f_k(t,X)}{\partial t}\mu=-\mu\frac{Df_k(t,X)}{DX}\left[A_k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_h^k\right].$$
$$.\left[1-\mu\left(trA\left(A_k(t)\right)+\sum_{h=1}^{n}trA\left(B_h^k\right)\right)\right]+$$
$$+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)f_s(t,X)\mu-\mu f_k(t,X)\left[trA\left(A_k(t)\right)+\sum_{h=1}^{n}trA\left(B_h^k\right)\right]$$

بالتقسيم على μ وجعل $\mu\to 0$ نجد:

$$\frac{\partial f_k(t,X)}{\partial t}=-\frac{Df_k(t,X)}{DX}\left[A_k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_h^k\right]X-$$
$$-f_k(t,X)\left[trA\left(A_k(t)\right)+\sum_{h=1}^{n}trA\left(B_h^k\right)\right]+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}f_s(t,X)$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial f_k(t,X)}{\partial t}=-\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial X_s}\left[f_k(t,X)A_k(t)X\right]-$$
$$-\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial X_s}\left[f_k(t,X)\sum_{h=1}^{n}B_h^k\ X\right]+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}f_s(t,X)$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial f_k(t,X)}{\partial t}=-\mathrm{div}\left[f_k(t,X)A_k(t)X\right]-$$
$$-\sum_{h=1}^{n}\ \sum_{s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial X_s}\left(f_k(t,X)B_h^k X\right)+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}f_s(t,X)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_k(t,X)}{\partial t} = -\operatorname{div}\left[f_k(t,X)A_k(t)X\right] -$$

$$-\sum_{h=1}^{n} \operatorname{div}\left(f_k(t,X)B_h^k X\right) + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks} f_s(t,X)$$

الآن لنحسب :

$$E_k\left(V\left(t,x(t),\xi(t)\right)\right) = \int_{\Omega_m} V(t,x,\theta_k) f_k(t,x)\,dx$$

$$dE_k\left(V\left(t,x(t),\xi(t)\right)\right) = \int_{\Omega_m} \frac{\partial V(t,x,\theta_k)}{\partial t} f_k(t,x)\,dx.dt$$

$$+\int_{\Omega_m} \frac{DV(t,x,\theta_k)}{DX} f_k(t,x)\,dx.dx +$$

$$+\int_{\Omega_m} V(t,x,\theta_k)\frac{\partial f_k(t,x)}{\partial t}dx.dt + \int_{\Omega_m} V(t,x,\theta_k)\frac{Df_k(t,x)}{DX}dx\,dx$$

ومنه:

$$\frac{dE_k\left(V\left(t,x(t),\xi(t)\right)\right)}{dt} = \int_{\Omega_m} \frac{\partial V(t,x,\theta_k)}{\partial t} f_k(t,x)\,dx +$$

$$\int_{\Omega_m} \frac{DV(t,x,\theta_k)}{Dx} f_k(t,x)\frac{dx}{dt}dx +$$

$$+\int_{\Omega_m} V(t,x,\theta_k)\frac{\partial f_k(t,x)}{\partial t}dx + \int_{\Omega_m} V(t,x,\theta_k)\frac{Df_k(t,x)}{DX}\frac{dx}{dt}.dx =$$

$$= \int_{\Omega_m} \frac{\partial V(t,x,\theta_k)}{\partial t} f_k(t,x)\,dx + \int_{\Omega_m} \frac{DV(t,x,\theta_k)}{DX} f_k(t,x).$$

$$.\left[A_k(t)X + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}X\right]dx +$$

$$+\int_{\Omega_m} V(t,x,\theta_k)\Big[-\operatorname{div}\left(f_k(t,x)A_k(t)X\right) - \sum_{h=1}^{n} \operatorname{div}\left(f_k(t,x)B_kX\right)$$

$$+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)f_S(t,x)\Bigg]dX+\int_{\Omega_m}V(t,x,\theta_k)\frac{Df_k(t,x)}{Dx}\left[A_k(t)X+\sum_{h=1}^{n}B_{hk}X\right]dx=$$

$$=E_k\left(\frac{\partial V(t,x,\theta_k)}{\partial t}\right)+\int_{\Omega_m}\frac{DV(t,x,\theta_k)}{DX}A_k(t)Xf_k(t,x)dx+$$

$$+\sum_{h=1}^{n}\int_{\Omega_m}\frac{DV(t,x,\theta_k)}{DX}B_{hk}f_k(t,x)dx-\int_{\Omega_m}V(t,x,\theta_k)\operatorname{div}\left(f_k(t,x)A_k(t)X\right)dx$$

$$-\sum_{h=1}^{n}\int_{\Omega_m}V(t,x,\theta_k)\operatorname{div}\left(f_k(t,x)B_kX\right)dx+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)\int_{\Omega_m}V(t,x,\theta_s)f_S(t,x)dx+$$

$$+\int_{\Omega_m}V(t,x,\theta_k)\frac{Df_k(t,x)}{Dx}A_k(t)Xdx+$$

$$+\sum_{h=1}^{n}\int_{\Omega_m}V(t,x,\theta_k)\frac{Df_k(t,x)}{DX}B_{hk}Xdx=$$

$$=E_k\left(\frac{\partial V(t,x,\theta_k)}{\partial t}\right)+E_k\left(\frac{DV(t,x,\theta_k)}{DX}A_k(t)X\right)+$$

$$+\sum_{h=1}^{n}E_k\left(\frac{DV(t,x,\theta_k)}{DX}B_{hk}X\right)+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)E_S\left(V(t,x,\theta_s)\right)=$$

$$=E_k\left(\frac{\partial V(t,x,\theta_k)}{\partial t}+\frac{DV(t,x,\theta_k)}{DX}\left(A_k(t)X+\sum_{h=1}^{n}B_{hk}X\right)\right)+$$

$$+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)E_S\left(t,x,\theta_S\right)$$

$$k=1,2,..,q$$

لنبحث عن تابع ليابونوف بالصيغة التربيعية:

$$V\left(t,x(t),\xi(t)\right)=x^*(t)C\left(t,\xi(t)\right)x(t)$$

ذات القيم الجزئية:

$$V_k\left(t,x(t),\xi(t)\right)=x^*(t)C_k(t)x(t)$$

حيث $C_k(t)=C(t,\theta_k)$ وحيث $k=1,2,..,q$

لدينا حسب ما سبق من أجل المصفوفتين :

$$A = [a_{ks}] \ , \ B = [b_{ks}] \ ; k = 1, 2, .., m \ ; \ s = 1, 2, .., \ell$$

$$AoB = \sum_{k=1}^{m} \sum_{s=1}^{\ell} a_{ks} b_{ks}^{*}$$

مبرهنة (3-1):

إن الجداء السابق يحقق الخاصتين التاليتين:

1) $C \text{ o } AM = A^{*} C \text{ o } M$

2) $C \text{ o } MA^{*} = CA \text{ o } M$

الإثبات:

بفرض: $C = [C_{sj}] \quad , \quad A = [a_{sj}]$

$s = 1, 2, .., m$

$j = 1, 2, .., m$ و C مصفوفة متناظرة

$$M = \sum_{k=1}^{q} M_k(t) = \sum_{k=1}^{q} \int_{\Omega_m} x(t) x^{*}(t) f_k(t,x) dx$$

$$M^{*} = \left(\sum_{k=1}^{q} M_k(t) \right)^{*} = \left(\sum_{k=1}^{q} \int_{\Omega_m} x(t) x^{*}(t) f_k(t,x) dx \right)^{*} =$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \left(\int_{\Omega_m} x(t) x^{*}(t) f_k(t,x) \, dx \right)^{*} = \sum_{k=1}^{q} \int_{\Omega_m} \left(x(t) x^{*}(t) \right)^{*} f_k(t,x) dx$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \int_{\Omega_m} x(t) x^{*}(t) f_k(t,x) \, dX = M$$

من أجل ذلك:

$$C o AM = \sum_{s=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} C_{sj} (a_{sj} . M)^{*} =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} C_{sj} M^* a_{sj}^* = \sum_{s=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{sj}^* C_{sj} . M^* = A^* C o M$$

وهو المطلوب.

$$C o M A^* = \sum_{s=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} C_{sj} . \left(M a_{sj}^* \right)^*$$

$$= \sum_{s=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} C_{sj} \left(a_{sj}^* \right)^* M^* = \sum_{s=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} C_{sj} a_{sj} . M^* = C A o M$$

وهو المطلوب.

الآن:

$$V_k \left(t, x(t), \xi(t) \right) = x^*(t) C_k(t) x(t) = C_k(t) o \left(x(t) x^*(t) \right)$$

$$k = 1, 2, .., q$$

ولدينا:

$$M_k(t) = E_k \left(x(t) x^*(t) \right) = \int_{\Omega_m} x(t) x^*(t) f_k(t, x) dx$$

لنحسب :

$$\frac{d}{dt} \left[C_k(t) o M_k(t) \right] = \frac{d C_k(t)}{dt} o M_k(t) + C_k(t) o \frac{d M_k(t)}{dt} =$$

$$= \frac{d C_k(t)}{dt} o M_k(t) + C_k(t) o \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_m} x(t) x^*(t) f_k(t, x) dX \right) =$$

$$= \frac{d C_k(t)}{dt} o M_k(t) + C_k(t) o \int_{\Omega_m} \frac{d X(t)}{dt} x^*(t) f_k(t, x) dx +$$

$$+ C_k(t) o \int_{\Omega_m} x(t) \frac{d x^*(t)}{dt} f_k(t, x) dx +$$

$$+ C_k(t) o \int_{\Omega_m} x(t) x^*(t) \frac{d f_k(t, x)}{dt} dx =$$

$$= \frac{dC_k(t)}{dt} o M_k(t) + C_k(t) o \int_{\Omega_m} \left[A_k(t)x(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk} X(t) \right] . x^*(t) f_k(t,x) dx$$

$$+ C_k(t) o \int_{\Omega_m} x(t) \left[x^*(t) A_k^*(t) + \sum_{h=1}^{n} x^*(t) B_{hk}^* \right] f_k(t,x) dx +$$

$$+ C_k(t) o \int_{\Omega_m} x(t)\, x^*(t) \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t) f_S(t,x) dx =$$

$$= \frac{dC_k(t)}{dt} o M_k(t) + C_k(t) o \left[A_k(t) \int_{\Omega_m} x(t) x^*(t) f_k(t,x) dx \right] +$$

$$+ \sum_{h=1}^{n} C_k(t) o B_{hk} \int_{\Omega_m} x(t) x^*(t) f_k(t,x) dx +$$

$$+ C_k(t) o \left(\int_{\Omega_m} x(t) x^*(t) f_k(t,x) dx \right) A_k^*(t) +$$

$$+ C_k(t) o \left(\sum_{h=1}^{n} \int_{\Omega_m} x(t)\, x^*(t) f_k(t,x) dx \right) B_{hk}^* +$$

$$+ C_k(t) o \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t) \int_{\Omega_m} x(t)\, x^*(t) f_S(t,x) dx =$$

$$= \frac{dC_k(t)}{dt} o M_k(t) + C_k(t) \left(A_k(t) M_k(t) \right) +$$

$$+ \sum_{h=1}^{n} C_k(t) o \left(B_{hk} M_k(t) \right) + C_k(t) o M_k(t) A_k^*(t) +$$

$$+ C_k(t) o \left(\sum_{h=1}^{n} M_k(t) B_{hk}^* \right) + C_k(t) o \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t) M_s(t) =$$

$$= \frac{dC_k(t)}{dt} o M_k(t) + A_k^*(t) C_k(t) o\, M_k(t) +$$

$$+\sum_{h=1}^{n} B_{hk}^{*} C_k(t) o M_k(t) + C_k(t) A_k(t) o M_k(t) +$$

$$+\left[\sum_{h=1}^{n} C_k(t) B_{hk}\right] o M_k(t) + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t)\left[C_k(t) o M_s(t)\right]$$

$$=\left[\frac{d C_k(t)}{d t} + A_k^{*}(t) C_k(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}^{*} C_k(t) + C_k(t) A_k(t) +\right.$$

$$\left. + \sum_{h=1}^{n} C_k(t) B_{hk} + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t) C_k(t)\right] o M_k(t)$$

$$k = 1, 2, .., q \quad ; \quad h = 1, 2, .., n$$

لنضع الشكل التربيعي :

$$W\left(t, x(t), \xi(t)\right) = x^{*}(t) G\left(t, x(t)\right) x(t)$$

والأشكال التربيعية الجزئية منها هي:

$$W_k\left(t, x(t), \xi(t)\right) = x^{*}(t) G_k(t) x(t)$$

حيث $G_k(t) = G(t, \theta_k)$ ؛ $k = 1, 2, .. , q$

وبتطبيق مبدأ ليابونوف لنضع :

$$\frac{d E\left(V\left(t, x(t), \xi(t)\right)\right)}{d t} = -E\left(W\left(t, x(t), \xi(t)\right)\right)$$

وذلك من أجل أي قيم لـ $x(t)$ و $\xi(t)$

لدينا:

$$E\left(V\left(t, x(t), \xi(t)\right)\right) = \sum_{k=1}^{q} E_k\left(V(t, x(t), \xi(t)\right)$$

$$W_k\left(t, x(t), \xi(t)\right) = x^{*}(t) G_k(t) x(t)$$

$$\sum_{k=1}^{q} E_k\left(\frac{d V_k(t, x(t), \xi(t)}{d t}\right) = -\sum_{k=1}^{q} E_k\left(W\left(t, x(t), \xi(t)\right)\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{q} E_k\left(\frac{d}{dt}\left(x^*(t)C_k(t)x(t)\right)\right) = -\sum_{k=1}^{q} E_k\left(x^*(t)G_k(t)x(t)\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{q} E_k\left(\frac{d}{dt}\left(C_k(t)o(x^*(t)x(t)\right)\right) = -\sum_{k=1}^{q} E_k\left(G_k(t)o\,x^*(t)x(t)\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{q} \frac{d}{dt}\left(C_k(t)oE_k\left(x^*(t)x(t)\right)\right) = -\sum_{k=1}^{q} G_k(t)oE_k\left(x^*(t)x(t)\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{q} \frac{d}{dt}\left(C_k(t)oM_k(t)\right) = -\sum_{k=1}^{q}\left[G_k(t)oM_k(t)\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{q}\left[\frac{dC_k(t)}{dt} + A_k^*(t)C_k(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}^*C_k(t) + C_k(t)A_k(t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{h=1}^{n} C_k(t)B_{hk} + \sum_{s=1}^{q} C_s(t)\alpha_{ks}(t)\right] oM_k(t) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{q}\left[G_k(t)oM_k(t)\right]$$

بالمطابقة نحصل على:

$$\frac{dC_k(t)}{dt} + A_k^*(t)C_k(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}^*C_k(t) + C_k(t)A_k(t) +$$

$$+ \sum_{h=1}^{n} C_k(t)B_{hk} + \sum_{s=1}^{q} C_s(t)\alpha_{ks}(t) = -G_k(t)$$

$$k = 1, 2, .., q$$

$$\Rightarrow x^*(t)\left[\frac{dC_k(t)}{dt} + A_k^*(t)C_k(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}^*C_k(t) + \right.$$

$$\left. + C_k(t)A_k(t) + \sum_{h=1}^{n} C_k(t)B_{hk} + \sum_{s=1}^{q} C_s(t)\alpha_{ks}(t)\right] x(t) =$$

$$= -x^*(t)G_k(t)x(t)$$

$$x^*(t)\frac{dC_k(t)}{dt}x(t) + x^*(t)A_k^*(t)C_k(t)x(t) + \sum_{h=1}^{n} x^*(t)B_{hk}^*C_k(t)x(t)$$

$$+x^*(t)C_k(t)A_k(t)x(t) + \sum_{h=1}^{n} x^*(t)C_k(t)B_{hk}x(t) +$$

$$+\sum_{s=1}^{q} x^*(t)C_k(t)\alpha_{ks}(t)x(t) = -x^*(t)G_k(t)x(t)$$

لكن لدينا :

$$\frac{dx(t)}{dt} = A\big(t, \xi(t))x(t)\big) + \sum_{h=1}^{n} B_h\big(\xi(t)\big)x(t)$$

وأيضاً :

$$\frac{dx^*(t)}{dt} = x^*(t)A_k^*(t) + \sum_{h=1}^{n} x^*(t)B_{hk}^*$$

ومنه:

$$x^*(t)\frac{dC_k(t)}{dt}x(t) + x^*(t)\big(C_k(t)\big)\left[A_k(t)x(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}\,x(t)\right]$$

$$+\left[x^*(t)A_k^*(t) + \sum_{h=1}^{n} x^*(t)B_{hk}^*\right]C_k(t)x(t) +$$

$$+\sum_{s=1}^{q} x^*(t)C_k(t)\alpha_{ks}(t)x(t) = -x^*(t)G_k(t)x(t)$$

ومنه نجد:

$$x^*(t)\frac{dC_k(t)}{dt}x(t) + x^*(t)C_k(t)\frac{dx(t)}{dt} + \frac{dx^*(t)}{dt}C_k(t)x(t)$$

$$+\sum_{s=1}^{q} x^*(t)C_k(t)\alpha_{ks}(t)x(t) = -x^*(t)G_k(t)x(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\Big(x^*(t)C_k(t)x(t)\Big) + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t)[x^*(t)C_k(t)x(t)] =$$

$$= -x^*(t)G_k(t)x(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(V_k\left(t, x(t)\right)\right) + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t) V_s\left(t, x(t)\right) = -W_k\left(t, x(t)\right)$$

$$k = 1, 2, .., q$$

ملاحظة (3-1) :

لدينا :

$$E_k\left(C_k(t) o \left(x^*(t) x(t) \right) \right) = E_k\left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} C_{ij}\left(x^*(t) x(t) \right) \right)^*$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} E_k\left(C_{ij}\left(x^*(t) x(t) \right) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} E_k^*\left(C_{ij}\left(x^*(t) x(t) \right) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} . E_k^*\left(x^*(t) x(t) \right)$$

$$= C_k(t) o E_k\left(x^*(t) x(t) \right)$$

نتيجة (3-1) :

إن العزوم الجزئية من المرتبة الثانية $M_k(t)$ تحقق المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dM_k(t)}{dt} = A_k(t) M_k(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk} M_k(t) + M_k(t) A_k^*(t) + \sum_{h=1}^{n} M_k(t) B_{hk}^* + \sum_{s=1}^{q} M_s(t) \alpha_{ks}(t) \qquad (3\text{-}3)$$

الإثبات : إن :

$$M_k(t) = \int_{\Omega_m} x(t) x^*(t) f_k\left(t, x(t)\right) dx$$

$$\frac{dM_k(t)}{dt} = \int_{\Omega_m} \frac{dx(t)}{dt} x^*(t) f_k\left(t, x(t)\right) dx + \int_{\Omega_m} x(t) \frac{dx^*(t)}{dt} f_k\left(t, x(t)\right) dx + \\ + \int_{\Omega_m} x(t)\, x^*(t) \frac{df_k\left(t, x(t)\right)}{dt} dx$$

$$\frac{dM_k(t)}{dt} = \int_{\Omega_m} x(t)\left[x^*(t)A_k^*(t) + \sum_{h=1}^{n} x^*(t)B_{hk}^* \right] f_k\left(t, x(t)\right)dx +$$

$$+ \int_{\Omega_m} \left[A_k(t)x(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}x(t) \right] x^*(t) f_k\left(t, x(t)\right)dx +$$

$$+ \int_{\Omega_m} x(t)x^*(t)\sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t) f_s\left(t, x(t)\right) dx$$

$$k = 1, 2, .. , q$$

$$\frac{dM_k(t)}{dt} = M_k(t)A_k^*(t) + \sum_{h=1}^{n} M_k(t)B_{hk}^* +$$

$$+A_k(t)M_k(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}\, M_k(t) + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t)M_s(t)$$

وهو المطلوب.

الآن لدينا العلاقة التالية:

$$x^*(t)C_k(t)x(t) = C_k(t) \ o\left(x(t)x^*(t)\right)$$

لنعرف الجداء الداخلي :

$$0 < \langle C(t), M(t) \rangle = \sum_{k=1}^{q} C_k(t) o M_k(t) = \text{const}$$

الآن:

$$0 = \frac{d}{dt}\langle C(t), M(t) \rangle = \sum_{k=1}^{q} \frac{d}{dt}\left[C_k(t) o M_k(t) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \left[\frac{dC_k(t)}{dt} o M_k(t) + \left(C_k(t) o \frac{dM_k(t)}{dt} \right) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \frac{dC_k(t)}{dt} o M_k(t) + C_k(t) o \left[A_k(t)M_k(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}\, M_k(t) \right.$$

$$\left. +A_k^*(t)M_k(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}^* M_k(t) + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t)M_s(t) \right]$$

الآن بتطبيق الخاصتين:

$$C \circ AM = A^{*}C \circ M \quad ; \quad C \circ MA^{*} = CA \circ M$$

ومنه :

$$0=\sum_{k=1}^{q}\frac{dC_k(t)}{dt}\circ M_k(t)+C_k(t)\circ A_k(t)M_k(t)+$$
$$+\sum_{h=1}^{n}C_k(t)\circ B_{hk}\,M_k(t)\;+C_k(t)\circ A_k^{*}(t)M_k(t)+$$
$$+\sum_{h=1}^{n}C_k(t)\circ B_{hk}^{*}\,M_k(t)+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)C_k(t)\circ M_s(t)$$

$$0=\sum_{k=1}^{q}\frac{dC_k(t)}{dt}\circ M_k(t)+A_k^{*}(t)C_k(t)\circ M_k(t)+$$
$$+\sum_{h=1}^{n}B_{hk}^{*}\,C_k(t)\circ M_k(t)+A_k(t)C_k(t)\circ M_k(t)+$$
$$+\sum_{h=1}^{n}B_{hk}\,C_k(t)\circ M_k(t)+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)C_k(t)\circ M_s(t)$$

$$0=\sum_{k=1}^{q}\Bigg[\frac{dC_k(t)}{dt}+A_k^{*}(t)C_k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_{hk}^{*}\,C_k(t)+$$
$$+A_k(t)C_k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_{hk}\,C_k(t)+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)C_s(t)\;\Bigg]\circ M_k(t)$$

بالمطابقة نحصل على :

$$\frac{dC_k(t)}{dt}+A_k^{*}(t)C_k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_{hk}^{*}\,C_k(t)+A_k(t)C_k(t)+$$
$$+\sum_{h=1}^{n}B_{hk}\,C_k(t)+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)C_s(t)=0 \qquad (4\text{-}3)$$

$$k = 1, 2, .. , q$$

بالتالي يمكن صياغة المبرهنات التالية :

مبرهنة (3-2):

الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري للجملة:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A\big(t,\xi(t)\big)x(t) + \sum_{h=1}^{n} B_h\big(\xi(t)\big)x(t) \qquad (1\text{-}3)$$

استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي أي استقرار الحل للجملة :

$$\begin{aligned}\frac{dM_k(t)}{dt} &= A_k(t)M_k(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}M_k(t) + A_k^*(t)M_k(t) + \\ &+ \sum_{h=1}^{n} B_{hk}^* M_k(t) + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t)M_s(t)\end{aligned} \qquad (3\text{-}3)$$

استقراراً مقارباً عندما $t \longrightarrow +\infty$.

هو أن يكون الحل الصفري للجملة :

$$\begin{aligned}\frac{dC_k(t)}{dt} &+ A_k^*(t)C_k(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}^* C_k(t) + A_k(t)C_k(t) + \\ &+ \sum_{h=1}^{n} B_{hk}C_k(t) + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t)C_s(t) = 0\end{aligned} \qquad (4\text{-}3)$$

مستقراً استقراراً مقارباً عندما $t \longrightarrow -\infty$.

مبرهنة (3-3):

الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري للجملة الأساسية :

$$\frac{dx(t)}{dt} = A\big(t,\xi(t)\big)x(t) + \sum_{h=1}^{n} B_h\big(\xi(t)\big)x(t) \qquad (1\text{-}3)$$

استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي هو أن يكون للجملة :

$$\begin{aligned}\frac{dC_k(t)}{dt} &+ A_k^*(t)C_k(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}^* C_k(t) + A_k(t)C_k(t) + \\ &+ \sum_{h=1}^{n} B_{hk}C_k(t) + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t)C_s(t) = -G_k(t)\end{aligned} \qquad (5\text{-}3)$$

حلاً مستقراً استقراراً مقارباً عندما $t \longrightarrow -\infty$.

نتيجة (2-3) :

نستنتج من المبرهنة (2-3) أنه توجد C_{ko} بحيث $C_{ko} = Const$

$k = 1, 2, .. , q$

تحقق جملة المعادلات (أو المعادلة) :

$$\frac{dC_k(t)}{dt} + A_k^*(t)C_k(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}^* C_k(t) + A_k(t)C_k(t) + + \sum_{h=1}^{n} B_{hk} C_k(t) + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t)C_s(t) = -G_k(t) \qquad (5-3)$$

أي:

$$A_k^*(t)C_{ko} + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}^* C_{ko} + A_k(t)C_{ko} + \sum_{h=1}^{n} B_{hk} C_{ko} + + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t)C_{so} = -G_k(t) \qquad (6-3)$$

من أجل قيم صغيرة لـ g حيث $g > 0$ يمكن كتابة الدستور الذي يعطي تقريب متتالي بالشكل :

$$C_{k,n+1} = C_{k,n} + g\left(A_k^*(t)C_{kn} + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}^* C_{kn} + A_k(t)C_{kn} + + \sum_{h=1}^{n} B_{hk} C_{kn} + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t)C_{sn} + G_k(t) \right) \qquad (7-3)$$

بحيث أن :

$$\lim_{n \to +\infty} C_{kn} = C_{ko}$$

وذلك من أجل أي قيمة ابتدائية C_{k1} .

مبرهنة (4-3) :

الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي لجملة المعادلات :

$$\frac{dx(t)}{dt} = A\big(t, \xi(t)\big)x(t)\big) + \sum_{h=1}^{n} B_h\big(\xi(t)\big)x(t) \qquad (1-3)$$

وفق العملية الماركوفية :

$$\xi(t) = \theta_k \; ; \; k = 1, 2, .., q$$

هو وجود حل C_{ko} للمعادلة :

$$A_k^*(t)C_k + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}^* C_k + A_k(t)C_k + \sum_{h=1}^{n} B_{hk} C_k + \\ + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t)C_s = -G_k(t) \qquad (6\text{-}3)$$

بحيث $C_{ko} > 0$ $(k = 1, 2, .. , q)$ من أجل أي مصفوفات $G_k(t) > 0$ حيث $k = 1, 2, .., q$

الإثبات:

كفاية الشرط :

من أجل المصفوفات $G_k(t) > 0$ نفرض وجود الحل $C_{ko} > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$ للمعادلة المعطاة (6-3) لكن لدينا :

$$\frac{dE_k\left(V\left(t, x(t), \xi(t)\right)\right)}{dt} = E_k\left(\frac{\partial V(t, x, \theta_k)}{\partial t} + \frac{DV(t, x, \theta_k)}{Dx}. \right. \\ \left. .\left(A_k(t)x + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}\, x\right)\right) + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t) E_s(t, x, \theta_k)$$

$$k = 1, 2, .. , q$$

نحسب مشتق التابع $E\left(V(t, x(t), \xi(t))\right)$ فنجد أن :

$$\frac{dE_k\left(V\left(t, x(t), \xi(t)\right)\right)}{dt} = -E\left(W\left(t, x(t), \xi(t)\right)\right)$$

حيث :

$$W\left(t, x(t), \xi(t)\right) = x^*(t) G\left(t, \xi(t)\right) x(t)$$

$$G\,(t, \theta_k) = G_k(t) \quad ; \quad \xi(t) = \theta_k(t)$$

$$k = 1, 2, .. , q$$

$$W\left(t, x(t), \xi(t)\right) = x^*(t) G_k(t) x(t)$$

$$k = 1, 2, .. , q$$

بما أن التوابع $V\left(t,x(t),\xi(t)\right)$ و$W\left(t,x(t),\xi(t)\right)$ موجبة تماماً إذاً يوجد التابع $\gamma(t) > 0$ وذلك من أجل $t\in(-\infty,+\infty)$ بحيث يحقق المتراجحة :

$$\gamma(t)\,V\left(t,x(t),\xi(t)\right)\le W\left(t,x(t),\xi(t)\right)$$

$$\xi(t)=\theta_k(t)$$

$$k = 1, 2, .. , q$$

وبالتالي يمكن أن نكتب :

$$\gamma(t)\,E\left(V\left(t,x(t),\xi(t)\right)\right)\le E\left(W\left(t,x(t),\xi(t)\right)\right)$$

$$\gamma(t)\,E\left(V\left(t,x(t),\xi(t)\right)\right)\le \frac{-d\,E\left(V\left(t,x(t),\xi(t)\right)\right)}{dt}$$

$$\frac{d\,E\left(V\left(t,x(t),\xi(t)\right)\right)}{dt}\le -\gamma(t)\,E\left(V\left(t,x(t),\xi(t)\right)\right)$$

نكامل الطرفين :

$$\int_0^t \frac{d\,E\left(V\left(t,x(t),\xi(t)\right)\right)}{E\left(V\left(t,x(t),\xi(t)\right)\right)}\le -\int_0^t \gamma(\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow\ \ell n\,E\left(V\left(t,x(t),\xi(t)\right)\right)\le -\int_0^t \gamma(\tau)\,d\tau+\ell n\,E\left(V\left(o,x_0,\xi(o)\right)\right)$$

$$E\left(V\left(t,x(t),\xi(t)\right)\right)\le e^{-\int_0^t \gamma(\tau)\,d\tau}.E\left(V\left(o,x_0,\xi(o)\right)\right)$$

يوجد لدينا $\alpha_1(t)$ و $\alpha_2(t)$ بحيث :

$$\alpha_1(t) > 0 \quad ; \quad \alpha_2(t) > 0 \qquad t\in(-\infty,+\infty)$$

ويتحقق أن :

$$\alpha_1(t)\,V\left(t,x(t),\xi(t)\right)\le \|x\|^2\le \alpha_2(t)\,V\left(t,x(t),\xi(t)\right)$$

حيث : $\xi(t)=\theta_k(t)$ ، $k = 1, 2, .. , q$

لكن :

$$\|x\|^2 \le \alpha_2(t)V(t,x(t),\xi(t))$$

$$E\left(\|x\|^2\right) \le \alpha_2(t).E\left(V(t,x(t),\xi(t))\right)$$

$$E\left(\|x\|^2\right) \le \alpha_2(t).e^{-\int_0^t \gamma(\tau)d\tau}.E\left(V(o,x_0,\xi(o))\right)$$

ولدينا أيضاً :

$$\alpha_1(t)E\left(V(t,x(t),\xi(t))\right) \le E\left(\|x\|^2\right)$$

و $E\left(\|x_0\|^2\right)=\|x_0\|^2$ وبحيث $\alpha_1(0)\neq 0$

$$\alpha_1(0)E\left(V(o,x(o),\xi(o))\right) \le \|x_0\|^2$$

$$E\left(V(o,x(o),\xi(o))\right) \le \frac{1}{\alpha_1(o)}\|x_0\|^2$$

$$\Rightarrow E\left(\|x\|^2\right) \le \frac{\alpha_2(t)}{\alpha_1(o)}e^{-\int_0^t \gamma(\tau)d\tau}\|x_0\|^2;$$

$$t\in(-\infty,+\infty) \quad ; \quad 0<\alpha_2(t)<+\infty$$

وبالتالي:

$$E\left(\|x\|^2\right) \le \frac{\alpha_2(o)}{\alpha_1(o)}e^{-\int_0^t \gamma(\tau)d\tau}.\|x_0\|^2$$

وهذا يعني أن الحل مستقر استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي.

لزوم الشرط :

الآن لنفرض أن الحل الصفري للجملة مستقر استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي هذا يعني أن الحل الصفري للجملة $\frac{dM_k(t)}{dt}$ مستقر من أجل $t\longrightarrow+\infty$ أي أن الحل الصفري للجملة

$\frac{dC_k(t)}{dt}$ مستقر استقراراً مقارباً عندما $t \longrightarrow -\infty$.

لنضع الجملة :

$$\frac{dC_k(t)}{dt} + A_k^*(t)C_k(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}^* C_k(t) + A_k(t)C_k(t) + \\ + \sum_{h=1}^{n} B_{hk} C_k(t) + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t)C_s(t) = -G_k(t) \qquad (5\text{-}3)$$

$$k = 1, 2, .. , q$$

ومنه نكتب:

$$\frac{dC_k(t)}{dt} + A_k^*(t)C_k(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}^* C_k(t) + A_k(t).C_k(t) + \\ + \sum_{h=1}^{n} B_{hk} C_k(t) + \sum_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{q} \alpha_{ks}(t)C_s(t) + \alpha_{kk}(t)C_k(t) = -G_k(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dC_k(t)}{dt} + \left(A_k^*(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}^* + A_k(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk} + \alpha_{kk}(t) I \right).C_k(t) \\ = -\left(G_k(t) + \sum_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{q} \alpha_{ks}(t)C_s(t) \right)$$

لنحل المتجانسة منها :

$$\frac{dC_k(t)}{dt} + \left(A_k^*(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}^* + A_k(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk} + \alpha_{kk}(t) I \right) C_k(t) = 0$$

$$\frac{dC_k(t)}{dt} = -\left(A_k^*(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}^* + A_k(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk} + \alpha_{kk}(t) I \right) C_k(t)$$

$$\frac{dC_k(t)}{C_k(t)} = -\left(A_k^*(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}^* + A_k(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk} + \alpha_{kk}(t) I \right) dt$$

بالمكاملة :

$$\ln C_k(t) = -\int_0^t \left(A_k^*(\tau) + A_k(\tau) + \alpha_{kk}(\tau) I) \right) . d\tau - \sum_{h=1}^{n} (B_{hk}^* + B_{hk}) t + \ln F$$

حيث: F = const

نلاحظ أن:

$$B_{hk}^* + B_{hk} = 2 \operatorname{tr}(B)$$

$$\Rightarrow \; C_k(t) = e^{-\int_0^t \left(A_k^*(\tau) + A_k(\tau) + \alpha_{kk}(\tau) I) \right) d\tau} . e^{-\sum_{h=1}^{n} (B_{hk}^* + B_{hk}) t} . F$$

لحل غير المتجانسة تعتبر F تابع لـ t ونشتق بالنسبة لـ t :

$$\frac{d C_k(t)}{d t} = -\left(A_k^*(t) + A_k(t) + \alpha_{kk}(t) I + \sum_{h=1}^{n} (B_{hk}^* + B_{hk}) \right) .$$

$$. e^{-\int_0^t \left(A_k^*(\tau) + A_k(\tau) + \alpha_{kk}(\tau) I \right) d\tau - \sum_{h=1}^{n} (B_{hk}^* + B_{hk}) t} . F +$$

$$+ \frac{dF}{dt} e^{-\int_0^t \left(A_k^*(\tau) + A_k(\tau) + \alpha_{kk}(\tau) I \right) d\tau - \sum_{h=1}^{n} (B_{hk}^* + B_{hk}) t}$$

نعوض في غير المتجانسة :

$$\frac{dF}{dt} . e^{-\int_0^t \left(A_k^*(\tau) + A_k(\tau) + \alpha_{kk}(\tau) I \right) d\tau - \sum_{h=1}^{n} (B_{hk}^* + B_{hk}) t} = -\left(G_k(t) + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^{q} \alpha_{ks}(t) C_s(t) \right)$$

ومنه:

$$\frac{dF}{dt} = -\left(G_k(t) + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^{q} \alpha_{ks}(t) C_s(t) \right) e^{+\int_0^t \left(A_k^*(\tau) + A_k(\tau) + \alpha_{kk}(\tau) I \right) d\tau} . e^{\sum_{h=1}^{n} (B_{hk}^* + B_{hk}) t}$$

$$\Rightarrow F=\int_{t}^{0}\left[G_k(M)+\sum_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{q}\alpha_{ks}(M)C_s(M)\right].e^{+\int_0^M\left(A_k^*(\tau)+A_k(\tau)\alpha_{kk}(\tau)I\right)d\tau}$$

$$.e^{\sum_{h=1}^{n}(B_{hk}^*+B_{hk})M}.dM+Mo$$

من أجل $Mo=0$ نعوض في حل المتجانسة

$$C_k(t)=e^{-\int_0^t\left(A_k^*(\tau)+A_k(\tau)+\alpha_{kk}(\tau)I\right)d\tau-\sum_{h=1}^{N}(B_{hk}^*+B_{hk})t}$$

$$.\int_{t}^{0}\left[G_k(M)+\sum_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{q}\alpha_{ks}(M)C_s(M)\right].e^{+\int_0^M\left(A_k^*(\tau)+A_k(\tau)+\alpha_{kk}(\tau)I\right)d\tau}.e^{\sum_{h=1}^{n}(B_{hk}^*+B_{hk})M}dM$$

$$\Rightarrow C_k(t)=\int_{t}^{0}e^{\int_t^M\left(A_k^*(\tau)+A_k(\tau)+\alpha_{kk}(\tau)I\right)d\tau+\sum_{h=1}^{n}(B_{hk}^*+B_{hk})(M-t)}.$$

$$.\left[G_k(M)+\sum_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{q}\alpha_{ks}(M)C_s(M)\right]dM$$

نبدل كل $M-t$ بـ M وكل M بـ $M-t$ نجد :

$$C_k(t)=\int_{0}^{-t}e^{\int_t^{M-t}\left(A_k^*(\tau)+A_k(\tau)+\alpha_{kk}(\tau)I\right)d\tau+\sum_{h=1}^{n}(B_{hk}^*+B_{hk})M}.$$

$$.\left[G_k(M-t)+\sum_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{q}\alpha_{ks}(M-t)C_s(M-t)\right]dM$$

اعتماداً على أن:

$$\lim_{t\to-\infty}C_k(t)=C_{ko}$$

وفي حال أن $G_k(M - t) > 0$ ولها قيمة عظمى وصغرى هي $\delta_1(t), \delta_2(t)$ على الترتيب يمكن أن نكتب:

$$C_{ko} \geq \int_0^{+\infty} e^{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(A_k^*(\tau)+A_k(\tau)+\alpha_{kk}(\tau)I\right)d\tau+\sum_{h=1}^{n}(B_{hk}^*+B_{hk})M} .$$

$$.\left[\delta_1(t)+\sum_{\substack{s=1\\s\neq k}}^{q}\alpha_{ks}(M-t)C_s(M-t)\right]dM$$

الآن من أجل المصفوفة $C_k(t)$ ولنفرض أن $\beta_1(t)$ و $\beta_2(t)$ القيم الصغرى والعظمى لها على الترتيب إضافة لأن :

$$\alpha_{ks}(t)>0 \;\; ; \;\; t\in(-\infty,+\infty)$$

نكتب :

$$C_{ko} \geq \int_0^{+\infty} e^{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(A_k^*(\tau)+A_k(\tau)+\alpha_{kk}(\tau)I\right)d\tau+\sum_{h=1}^{n}(B_{hk}^*+B_{hk})M} .$$

$$.\left[\delta_1(t)+\sum_{\substack{s=1\\s\neq k}}^{q}\alpha_{ks}(M-t)\beta_S(t)\right]dM>0 \qquad (8\text{-}3)$$

وبالتالي إذا تحقق الشرط (8-3) تكون الجملة (1-3) مستقرة استقراراً مقارباً .

ملخص باللغة العربية

استقرار جملة المعادلات التفاضلية العشوائية بطريقة ليابونوف

موضوع الرسالة هو دراسة استقرار حل جملة المعادلات التفاضلية العشوائية من النموذج:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t, \xi(t))\, x(t) + \sum_{h=1}^{n} B_h(\xi(t))\, x(t) \qquad (1)$$

والتي تسمى معادلة لا توقفية مضطربة.

تتألف الأطروحة من مقدمة وثلاثة فصول وخاتمة حيث عرضنا في الفصل الأول أهم النتائج الأساسية في دراسة استقرار الحل لجملة المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة على الصورة:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A\ x(t) \ \ ; \ \ A = Const \ \ ; \ x(0) = x_0 \qquad (2)$$

مع أمثلة توضح كيفية إيجاد شروط الاستقرار وتابع ليابونوف الموافق لحل الجملة من النموذج السابق.

كما تم عرض أهم النتائج لدراسة استقرار الحل لجملة معادلات تفاضلية ذات معاملات متحولة على الصورة :

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t).x(t) \qquad (3)$$

حيث $t \in (-\infty, +\infty)$ و $A(t)$ مصفوفة الأمثال المتحولة.

وتم عرض أمثلة توضح كيفية إيجاد شروط الاستقرار وإنشاء تابع ليابونوف الموافق لحل الجملة من النموذج السابق المدروس.

في الفصل الثاني تم عرض مفاهيم أساسية متعلقة بالمعادلات التفاضلية العشوائية وأهم النتائج المتعلقة بدراسة استقرار الحل للنموذج

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t, \xi(t))\, x(t) \ \ ; \ \dim x = m \qquad (4)$$

و $\xi(t)$ عملية ماركوفية تأخذ القيم $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_q$ والذي من خلاله تمت دراسة النموذج:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A\left(\xi(t)\right).x(t) \qquad (5)$$

حيث نذكر أهم النتائج لهذه الدراسة:

مبرهنة (1):

الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري للجملة الأساسية (5) استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي هو أن يكون حل الجملة:

$$\frac{dM_K(t)}{dt} = A_K M_K(t) + M_K(t) A_K^*(t) + \sum_{S=1}^{q} \alpha_{KS} M_S(t) \qquad (6)$$

مستقر استقراراً مقارباً عندما $t \longrightarrow -\infty$ حيث $k = 1, 2, .. , q$.

مبرهنة (2):

الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري للجملة (5) استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي هو أن يكون للجملة المعطاة بالصورة:

$$\frac{dC_K(t)}{dt} + A_K^* C_K(t) + C_K(t) A_K + \sum_{\substack{S=1 \\ S \neq k}}^{q} \alpha_{KS} C_S(t) = -B_k \qquad (7)$$

حلاً مستقراً استقراراً مقارباً عندما $t \longrightarrow -\infty$ حيث $k = 1, 2, .. , q$.

مبرهنة (3):

الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي للجملة (5) هو وجود حل C_{k_0} للمعادلة:

$$C_K A_K + A_K^* C_K + \sum_{S=1}^{q} \alpha_{KS} \; C_K = -B_K \qquad (8)$$

$k = 1, 2,.., q$ حيث $C_{k_0} > 0$ من أجل أي مصفوفات $B_k > 0$.

في الفصل الثالث تمت معالجة النموذج (1) بالاعتماد على النماذج السابقة وتم التوصل إلى أهم النتائج متمثلة بإثبات المبرهنات التالية:

مبرهنة (1):

إن العزوم الجزئية من المرتبة الثانية $M_K(t)$ تحقق المعادلة:

$$\frac{dM_k(t)}{dt}=A_k(t)M_k(t)+\sum_{h=1}^{N}B_{hk}M_k(t)+M_k(t)A_k^*(t)$$

$$+\sum_{h=1}^{n}M_k(t)B_{hk}^*+\sum_{s=1}^{q}M_s(t)\alpha_{ks}(t) \qquad (9)$$

مبرهنة (2):

الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري للجملة (1) استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي هو استقرار حل جملة (9) استقراراً مقارباً عندما $t \longrightarrow +\infty$ أو استقرار الحل الصفري للجملة:

$$\frac{dC_k(t)}{dt}+A_k^*(t)C_k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_{hk}^*C_k(t)+A_k(t)C_k(t)+$$

$$+\sum_{h=1}^{n}B_{hk}C_k(t)+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)C_s(t)=0 \qquad (10)$$

استقراراً مقارباً عندما $t \longrightarrow -\infty$.

مبرهنة (3):

الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري للجملة (1) استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي هو أن يكون الحل الصفري للجملة:

$$\frac{dC_k(t)}{dt}+A_k^*(t)C_k(t)+\sum_{h=1}^{n}B_{hk}^*C_k(t)+A_k(t)C_k(t)+$$

$$+\sum_{h=1}^{n}B_{hk}C_k(t)+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)C_s(t)=-G_k(t) \qquad (11)$$

مستقراً استقراراً مقارباً عندما $t \longrightarrow -\infty$.

نتيجة:

نستنتج من المبرهنة (3) أنه يوجد C_{k_0} حل للجملة (11) والذي يعطى من خلال دستور التقريب المتتالي:

$$C_{k,n+1}=C_{k,n}+g\left(A_k^*(t)C_{kN}+\sum_{h=1}^{n}B_{hk}^*C_{kn}+A_k(t)C_{kn}+\right.$$

$$\left.+\sum_{h=1}^{n}B_{hk}C_{kn}+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)C_{sn}+G_k(t)\right) \qquad (12)$$

وذلك من أجل قيم صغيرة لـ g حيث $g>0$ ومن أجل أي قيمة ابتدائية $C_{k,1}$ وبالتالي:

$$\lim_{n\to+\infty}C_{Kn}=C_{Ko} \quad ; \quad C_{ko}=\text{const}$$

مبرهنة (4):

الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي لجملة المعادلات (1) حيث $\xi(t)$ عملية ماركوفية تأخذ القيم $o_1, o_2, .., o_q$ هو وجود حل C_{k_0} للمعادلة (11) بحيث $C_{k_0}>0$ و $C_{ko}=\text{const}$ حيث $k = 1,2,..,q$ من أجل المصفوفات $G_k(t) > 0$ حيث $(k = 1,2,..,q)$.

النتائج النهائية التي تم الحصول عليها:

1- إن العزوم الجزئية من المرتبة الثانية $M_k(t)$ حيث $(k = 1,2,..,q)$ تحقق المعادلة التفاضلية (9).

2- الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري للجملة (1) استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي هو استقرار حل الجملة (9) استقرار مقارب عندما $t\longrightarrow+\infty$.

3- الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري للجملة (1) استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي هو استقرار الحل الصفري للجملة (10) استقراراً مقارباً عندما $t\longrightarrow-\infty$.

4- الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري للجملة (1) استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي هو أن يكون الحل الصفري للجملة (11) مستقراً استقراراً مقارباً عندما $t\longrightarrow-\infty$.

5- وجود $C_{ko} = \text{const}$ يحقق الدستور التقريبي المتتالي (12) بحيث أن $\lim_{n\to+\infty}C_{Kn}=C_{Ko}$ وكما يحقق المعادلة (11).

6- الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري للجملة (1) استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي هو أن يكون الحل C_{ko} يحقق أن $C_{ko}>0$ للجملة (11) من أجل المصفوفات $G_k(t) > 0$ حيث $k = 1,2,..,q$.

ملخص باللغة الانكليزية

The subject of the thesis is to study the stability of the solution of the stochastic differential equations system of from

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t,\xi(t))\,x(t) + \sum_{h=1}^{n} B_h(\xi(t))\,x(t) \qquad (1)$$

Ahich called disturbant nonstationary equation.

- the thesis is composed of a preface, there chapters and a conclusion.

- we exhibited in the first chapter the most important essential results in study of the stability of the solution of the differential equations system, which has constant coefficients of from:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A\ x(t)\ \ ;\ A = Const\ \ ;\ x(0) = x_0 \qquad (2)$$

With examples which clear how to find the stability conditions and building Lyapunov function that it is compartible to the system's solution of the form above.

- Also we exhibited the most important results in study of the solution's staility of the differential equations system which has variable coefficients of form:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t).x(t) \qquad (3)$$

$t \in (-\infty, +\infty)$ and A(t) is the variable coefficients matrix.

- and we also exhibited examples which clear how to find the stability's conditions and building Lyapunov function that it is compatible to the system's solution of form (3).

- we exhibited in the second chapter essential conceptions which are attached to the stochastic differential equations, and the most important results that are retated to the solution stability study of form:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t,\xi(t))\,x(t)\ \ ;\ \dim x = m \qquad (4)$$

and $\xi(t)$ is Marcovian operation taking the values θ_1, θ_2, …., θ_q.

- we through the form (4) studied the form:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(\xi(t))\,x(t) \qquad (5)$$

- now let's exhibit the most important results of this study.

Lemma (1):

The necessary and sufficient condition for the zero solution of the essential system (5) to be stable approximately in the quadratic mean is that the solution of the equation:

$$\frac{dM_K(t)}{dt} = A_K M_K(t) + M_K(t) A_K^*(t) + \sum_{S=1}^{q} \alpha_{KS} M_S(t) \qquad (6)$$

is stable approximately when $t \longrightarrow +\infty$ where k = 1, 2,.., q.

Lemma (2):

The necessary and sufficient condition for the zero solution of the system (5) to be stable approximately in the quadratic mean is that the system in form:

$$\frac{dC_K(t)}{dt} + A_K^* C_K(t) + C_K(t) A_K + \sum_{\substack{S=1 \\ S \neq k}}^{q} \alpha_{KS} C_S(t) = -B_k \qquad (7)$$

has a stable solution approximately when $t \longrightarrow -\infty$ where k = 1, 2, .., q.

Lemma (3):

The necessary and sufficient condition for the zero solution of the system (5) to be stable approximately in the quadratic mean is to have a solution C_{k_0} of the equation:

$$C_K A_K + A_K^* C_K + \sum_{S=1}^{q} \alpha_{KS} \; C_K = -B_K \qquad (8)$$

when $C_{k_0} > 0$ where k = 1, 2, .. , q for any matrix $B_k > 0$.

-In the third chapter we sloved the form (1) according to the forms above, and concluded the most important results which are represented to improve the next Lemmaes.

Lemma (1):

The partial moments of the second stage $M_K(t)$ realize the equation:

$$\frac{d\,M_k(t)}{d\,t} = A_k(t) M_k(t) + \sum_{h=1}^{N} B_{hk} M_k(t) + M_k(t) A_k^*(t)$$

$$+ \sum_{h=1}^{N} M_k(t) B_{hk}^* + \sum_{s=1}^{q} M_s(t) \alpha_{ks}(t) \qquad (9)$$

Lemma (2):

The necessary and sufficient condition for the zero solution of the system (1) to be stable approximately in the quadratic mean is the solution stability of the system (9) approximately when $t \longrightarrow +\infty$. or the zero solution stability of the system:

$$\frac{dC_k(t)}{dt}+A_k^*(t)C_k(t)+\sum_{h=1}^{N}B_{hk}^*C_k(t)+A_k(t)C_k(t)+$$

$$+\sum_{h=1}^{N}B_{hk}C_k(t)+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)C_s(t)=0 \qquad (10)$$

Approximately when $t \longrightarrow -\infty$.

Lemma (3):

The necessary and sufficient condition for the zero solution of the system (1) to be stable approximately in the quadrian mean is that the zero solution of the system:

$$\frac{dC_k(t)}{dt}+A_k^*(t)C_k(t)+\sum_{h=1}^{N}B_{hk}^*C_k(t)+A_k(t)C_k(t)+$$

$$+\sum_{h=1}^{N}B_{hk}C_k(t)+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)C_s(t)=-G_k(t) \qquad (11)$$

Is stable approximately when $t \longrightarrow -\infty$.

Result:

We conclude of Lemma (3) that there is C_{k_0} as asolution of the system (11) which is given through the approximate constitution:

$$C_{k,N+1}=C_{k,N}+g\left(A_k^*(t)C_{kN}+\sum_{h=1}^{N}B_{hk}^*C_{kN}+A_k(t)C_{kN}+\right.$$

$$\left.+\sum_{h=1}^{N}B_{hk}C_{kN}+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)C_{sN}+G_k(t)\right) \qquad (12)$$

that is for small value of g when $g>0$ and for any primary value $C_{k,1}$.

so $\lim\limits_{n\to+\infty} C_{KN}=C_{Ko}$; $C_{ko}=\text{const}$.

Lemma (4):

The necessary and sufficient condition for the zero solution of the system (1) to be stable approximately in the quardian mean, where $\xi(t)$ is Marcovian operation taking values o_1, o_2, …, o_q, is existence of the solution C_{k_0} of the equation (11) that $C_{k_0}>0$ and $C_{ko}=\text{const}$ where k = 1,2,..,q for matrisses $G_k(t)>0$, (k = 1,2,..,q) .

The obtained final results:

1- The partial moments of the second stage $M_k(t)$ where k = 1,2,..,q achieve the differential equation (9).

2- The necessary and sufficient condition for the zero solution of the system

(1) to be stable approximately in the quardian mean is the solution stability of the system (9) approximately when $t \longrightarrow +\infty$.

3- The necessary and sufficiebt condition for the zero solution of the system (1) to be stable approximately in the quardian mean is the solution stability of the system (10) approximately when $t \longrightarrow -\infty$.

4- The necessary and sufficiebt condition for the zero solution of the system (1) to be stable approximately in the quardian mean is the solution stability of the system (11) approximately when $t \longrightarrow -\infty$.

5- The existence of C_{ko} = const achieve the approximate constilution (12) that $\lim_{n \to +\infty} C_{KN} = C_{Ko}$ and also achieve the equation (11).

6- The necessary and sufficiebt condition for the zero solution of the system (1) to be stable approximately in the quardian mean is that the solution C_{ko} of the system (11) achieves $C_{ko} > 0$ for matrisses $G_k(t) > 0$ where $k = 1,2,..,q$.

المراجع

1- Al arjeh S. Construction Lyapunov's function for stochastic system differential equation. journal of al Baath UNV., T, 31. 2009.

2 - APARANA, G, Systems Analysis: Concepts & Applications. CBS, Delhi, 1993, 303 P.

3- АфАНАСЬЕВ, В., КОЛМАНОВСКИЙ, В.,НОСОВ, В.,1989- **Математическая теория конструирования систем управления**. Вышая школа, Москва, 447 с.

4- BURTON, T, 1994 – An example on the asymptotic stability for functional differential equations, Non liner Anal.

Vol, 8, No. 3,365 – 368.

5- ВАЛЕЕВ, К.,ФИНИН, Г.,1981-**Построение функции Ляпунова** ,Наукювадумка, Киев,412с.

6- Валеев К.Г. Расщепление спектраматриц К. Вища шк ., 1986-272 с.

7-ГАНТМАХЕР ,Ф., 1967 -**Теория матриц**. Наука Москва ,576с.

8 - Ladde G.S, Sambandham M, 2004 – Stochastic versus deterministic systems of differential equations. Marcel Dekker, Inc, 317 p.

9 - Liu Kai, Stability of infinite Dimensional Stochastic Differential Equations With Applications, 2006, Taylor & Francis Group

10- Skorohod A.V. Asymptotic Methods In The Theory of Stochastic Differential Equations, Amer,Mat,Soc 1989.

11- Liu K.and Xia X.W, On The Exponential Stability In Mean Squqre of Neutral Stochastic Functional Differential Equations, SySt & Control. 37 (1999). 207 – 215.

12- Yoside K. , Functional Analysis Springer – Verlag , New York (1980).

13- P.E.KLODEN AND E.PLATEN, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

Syrian Arab Repuplic

Al – Baath University

Faculty science

Department of Mathematices

The Thesis for M.sc.degree in Mathematics: Stability of a system of stochastic Differerential equations using Lyapunov Method

Submitted by

REIAD RIMON JUBLY

Prof. D. SAMEH AL – ARJEH

Department of Mathematics

Faculty of science

Albaath University

2010 – 2011